Modelowanie zmienności i ryzyka

Metody ekonometrii finansowej

Małgorzata Doman, Ryszard Doman



Oficyna
a Wolters Kluwer business

SERIA AKADEMICKA

D. Witkowska	PODSTAWY EKONOMETRII I TEORII PROGNOZOWANIA Podręcznik z przykładami i zadaniami
T. Bednarski	ELEMENTY MATEMATYKI W NAUKACH EKONOMICZNYCH Podręcznik dla studentów ekonomii
Pod red. K. Winiarskiej	PODSTAWY RACHUNKOWOŚCI
Pod red. K. Winiarskiej	ZBIÓR ZADAŃ Z PODSTAW RACHUNKOWOŚCI
Pod red. K. Winiarskiej	RACHUNKOWOŚĆ ZAAWANSOWANA
K. Winiarska, *M. Kaczurak-Kozak*	RACHUNKOWOŚĆ BUDŻETOWA
E. Walińska	MIĘDZYNARODOWE STANDARDY RACHUNKOWOŚCI Ogólne zasady pomiaru i prezentacji pozycji bilansu i rachunku wyników
M. Andrzejewski, K. Jonas, *P. Młodkowski*	ZASTOSOWANIE TECHNIK KOMPUTEROWYCH W RACHUNKOWOŚCI Systemy dla małych i średnich przedsiębiorstw
P. Dittmann	PROGNOZOWANIE W PRZEDSIĘBIORSTWIE Metody i ich zastosowanie
M. Ciechan-Kujawa	RACHUNEK KOSZTÓW JAKOŚCI Wykorzystanie w zarządzaniu przedsiębiorstwem
S. Sojak, H. Jóźwiak	RACHUNEK KOSZTÓW DOCELOWYCH
D.P. Doyle	KONTROLA KOSZTÓW Element zarządzania strategicznego
Pod red. M. Poszwy	ROZLICZENIA PODATKOWE PRZEDSIĘBIORCY
B. Kołosowska, A. Tokarski, *M. Tokarski, E. Chojnacka*	STRATEGIE FINANSOWANIA DZIAŁALNOŚCI PRZEDSIĘBIORSTW
W. Rogowski	RACHUNEK EFEKTYWNOŚCI INWESTYCJI

FINANSE I INWESTYCJE

D. Wędzki	ANALIZA WSKAŹNIKOWA SPRAWOZDANIA FINANSOWEGO
Pod red. E. Nowaka	STRATEGICZNE ZARZĄDZANIE KOSZTAMI

Pełna oferta wydawnicza jest dostępna na stronie www.profinfo.pl

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Modelowanie zmienności i ryzyka

Metody ekonometrii finansowej

Małgorzata Doman, Ryszard Doman

Kraków 2009

Oficyna
a Wolters Kluwer business

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Projekt graficzny okładki i zdjęcie
Barbara Widłak

Redaktor
Anna Maria Thor

Korekta
Lilianna Rudnik

Redaktor techniczny
Janina Burek

Skład i łamanie
Wydawnictwo „jak" Andrzej Choczewski

© Copyright by Wolters Kluwer Polska Sp. z o.o. 2009
All rights reserved.

ISBN 978-83-7526-677-1
ISBN PDF-a: 978-83-264-1903-4

Wydane przez:
Wolters Kluwer Polska Sp. z o.o.

Redakcja Książek
01-231 Warszawa, ul. Płocka 5a
tel. 022 535-80-00

31-156 Kraków, ul. Zacisze 7
tel. 012 630-46-00

e-mail: ksiazki@wolterskluwer.pl
www.wolterskluwer.pl

Księgarnia internetowa: www.profinfo.pl

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Spis treści

Wstęp 9

1. Empiryczne własności finansowych szeregów czasowych 15
1.1. Procesy stochastyczne i szeregi czasowe 16
1.2. Pojęcie stacjonarności szeregu czasowego 17
1.3. Funkcja autokorelacji 18
1.4. Testowanie normalności rozkładu 19
1.5. Procentowe logarytmiczne stopy zwrotu 20
1.6. Fakty empiryczne 22
1.7. Od teorii do praktyki 34
1.8. Uwagi 44

2. Zależności liniowe w szeregach stóp zwrotu instrumentów finansowych 45
2.1. Testy Boxa–Pierce'a i Ljunga–Boxa 45
2.2. Szeregi liniowe 46
2.3. Modele autoregresji 47
2.4. Modele średniej ruchomej 61
2.5. Modele ARMA 66
2.6. Od teorii do praktyki 71
2.7. Uwagi 74

3. Modelowanie heteroskedastyczności warunkowej 75
3.1. Ogólna struktura modelu zmienności 76
3.2. Testowanie efektu ARCH 78
3.3. Model ARCH 79
3.4. Modele GARCH 81

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

3.5. Rozkłady błędu stosowane w modelach GARCH ... 85
3.6. Testowanie jakości dopasowania modelu ... 89
3.7. Ocena jakości prognoz ... 94
3.8. Od teorii do praktyki ... 96
3.9. Uwagi ... 104

4. Rodzina modeli typu GARCH ... 105
4.1. Rozszerzenia modelu GARCH(p,q) ... 105
4.2. Estymacja modeli AR-GARCH metodą największej wiarygodności ... 110
4.3. Od teorii do praktyki ... 112
4.4. Uwagi ... 118

5. Długa pamięć i persystencja w finansowych szeregach czasowych ... 119
5.1. Model ARIMA ... 120
5.2. Model ARFIMA ... 123
5.3. Długa pamięć i persystencja w szeregach zmienności ... 125
5.4. Testowanie stacjonarności i długiej pamięci ... 128
5.5. Od teorii do praktyki ... 133
5.6. Uwagi ... 138

6. Zmienność cen instrumentów finansowych ... 139
6.1. Pojęcie zmienności w ujęciu statycznym i dynamicznym ... 140
6.2. Zmienność zrealizowana ... 142
6.3. Efekty mikrostruktury rynku a zmienność zrealizowana ... 150
6.4. Teoria zmienności zrealizowanej ... 153
6.5. Od teorii do praktyki ... 157
6.6. Uwagi ... 166

7. Modele dwuliniowe ... 167
7.1. Charakterystyka modeli dwuliniowych ... 167
7.2. Modele dwuliniowe a zgrupowania zmienności ... 168
7.3. Od teorii do praktyki ... 170
7.4. Uwagi ... 175

8. Modele zmienności stochastycznej ... 176
8.1. Charakterystyka modeli zmienności stochastycznej ... 177
8.2. Estymacja modelu SVX ... 179

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

8.3. Prognozowanie zmienności za pomocą modeli SV ... 183
8.4. Porównanie wyników uzyskanych za pomocą modeli GARCH i SV ... 184
8.5. Od teorii do praktyki ... 188
8.6. Uwagi ... 195

9. Wartość zagrożona ... 196
9.1. Metody nieparametryczne szacowania wartości zagrożonej ... 198
9.2. Wyznaczanie wartości zagrożonej za pomocą kwantyli warunkowych ... 201
9.3. Zastosowanie parametrycznych modeli zmienności do wyznaczania VaR ... 202
9.4. Metodologia RiskMetrics ... 203
9.5. Test Kupca ... 203
9.6. Test DQT Engle'a i Manganellego ... 205
9.7. Od teorii do praktyki ... 206
9.8. Uwagi ... 218

10. Regresja kwantylowa i modele CAViaR ... 219
10.1. Kwantyle regresyjne ... 219
10.2. Modele CAViaR ... 221
10.3. Estymacja modeli CAViaR ... 223
10.4. Od teorii do praktyki ... 225
10.5. Uwagi ... 238

11. Modele przełącznikowe ... 239
11.1. Modele progowe ... 240
11.2. Modele wygładzonego przejścia ... 240
11.3. Model Hamiltona ... 241
11.4. Modele MS-AR-GARCH ... 246
11.5. Od teorii do praktyki ... 249
11.6. Uwagi ... 264

12. Modelowanie dynamiki zależności warunkowych ... 265
12.1. Ogólny wielowymiarowy model zmienności ... 266
12.2. Zależności liniowe w szeregach wielowymiarowych ... 267
12.3. Model VEC ... 270
12.4. Model BEKK ... 270
12.5. Model stałych korelacji warunkowych ... 271
12.6. Modele dynamicznych korelacji warunkowych ... 272

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

12.7. Modele O-GARCH i GO-GARCH ... 275
12.8. Test stałości korelacji ... 276
12.9. Od teorii do praktyki ... 277
12.10. Uwagi ... 285

13. Wartość zagrożona portfela ... 286
13.1. Metoda symulacji historycznej ... 286
13.2. Szacowanie wartości zagrożonej portfela za pomocą wielowymiarowych modeli GARCH ... 288
13.3. Koherentne miary ryzyka ... 289
13.4. Od teorii do praktyki ... 290
13.5. Uwagi ... 293

Zakończenie ... 295

Dodatek ... 297

Literatura ... 299

Indeks ... 313

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Wstęp

Ekonometria finansowa jest dziedziną, która rozwinęła się z klasycznej ekonometrii, analizy szeregów czasowych oraz finansów. Szeroko rozumiana obejmuje całą tematykę modelowania rynków finansowych, czasami jednak sprowadza się ją do analizy finansowych szeregów czasowych, która niewątpliwie zalicza się do jej głównych nurtów.

Powstanie ekonometrii finansowej datuje się na rok 1982, w którym prestiżowe czasopismo „Econometrica" opublikowało artykuł Roberta Engle'a wprowadzający modele ARCH. Jest to o tyle ciekawe, że praca ta nie dotyczyła rynków finansowych, a jedynie wykorzystywała w modelowaniu inflacji model wychwytujący zgrupowania zmienności charakterystyczne dla większości szeregów stóp zwrotu z instrumentów finansowych.

Oczywiście już wcześniej publikowane były wyniki, które można by dzisiaj zaliczyć do ekonometrii finansowej. Na pewno należałoby w tym kontekście wymienić wyniki zawarte w pracach Famy oraz Mandelbrota z lat 60. i 70. XX wieku, które stworzyły podstawy do powstania w odpowiednim momencie nowej dyscypliny.

Ekonometria finansowa rozwija się obecnie bardzo gwałtownie, co jest spowodowane nie tylko wzrostem aktywności ośrodków akademickich, w których jest uprawiana, ale również zwiększeniem możliwości komputerów pozwalających na dokonywanie nawet bardzo złożonych obliczeń, gromadzenie i przetwarzanie ogromnej liczby danych, a także ciągłym zapotrzebowaniem zgłaszanym przez praktyków, wynikającym z rozwoju rynków finansowych.

Atrakcyjność ekonometrii finansowej jako dyscypliny badawczej jest związana w dużym stopniu z jej interdyscyplinarnością. Do osiągnięcia sukcesu w jej uprawianiu potrzeba bowiem jednoczesnej znajomości bardzo zaawansowanych i zróżnicowanych metod ilościowych oraz dość szczegółowej wiedzy na temat funkcjonowania rynków finansowych połączonej z ciągłą obserwacją rzeczywistości tych rynków. Jest to trudne, ale, jak nasze doświadczenia dydaktyczne pokazują, często fascynujące wyzwanie dla młodych ludzi.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Niniejsza książka powstała na podstawie materiału badawczego przedstawionego przez autorów w ich monografii opublikowanej w 2004 roku, a także w późniejszych pracach. Stanowi ona znacznie rozszerzoną i uporządkowaną wersję wykładów z modelowania zmienności i ryzyka, prowadzonych przez Małgorzatę Doman od 3 lat na kierunku informatyka i ekonometria w Akademii Ekonomicznej w Poznaniu oraz z ekonometrii finansowej, prowadzonych przez Ryszarda Domana dla specjalności matematyka finansowa i aktuarialna na Uniwersytecie im. Adama Mickiewicza. Nasze doświadczenia pokazują, że (przy raczej dużym zaangażowaniu słuchaczy i wykładowcy) przedstawiony materiał można zrealizować w trakcie semestralnego wykładu.

Książka jest jednak także w stosownym stopniu obrazem naszych doświadczeń z teorii i praktyki modelowania, ponieważ oboje pracujemy aktywnie naukowo w tej dziedzinie. W ramach ograniczonych objętością wykładu, książka może być również traktowana jako monografia przedstawiającą wybrane aspekty wiedzy w zakresie modelowania zmienności.

Niektórym czytelnikom wybór treści przedstawionych w tej książce może wydawać się niekonsekwentny. Czasami szczegółowo tłumaczymy pojęcia uważane za łatwe, a kiedy indziej dość szybko przechodzimy do porządku dziennego nad rzeczami złożonymi. Jest to jednak zamierzone i wynika z naszych doświadczeń związanych z prowadzonymi wykładami. Nie jest niczym nadzwyczajnym, zwłaszcza na kierunkach ekonomicznych, swobodne posługiwanie się pojęciem estymatora bez choćby poprawnej intuicji tego, czym jest zmienna losowa. Wychodząc zatem z założenia, że w trakcie wykładu zamiast długo dochodzić, czy studenci rozumieją podstawowe pojęcia, lepiej jest szybko i krótko je wyjaśnić, przedstawiamy, na przykład, w pierwszym rozdziale w sposób intuicyjny niezbędne informacje na temat prawdopodobieństwa i zbiorów informacji.

W tego typu książce, która z założenia ma być dostępna dla szerokiego grona czytelników, konieczne są pewne uproszczenia i odwołania do intuicji. Kompromis pomiędzy ścisłością a komunikatywnością wydaje nam się niezbędny. Staramy się więc znaleźć pewną równowagę. Czasami, kiedy na założonym poziomie zaawansowania nie można precyzyjnie wyjaśnić pewnych subtelności, wolimy o nich nie wspominać, niż ryzykować mało precyzyjne rozważania. Zakładamy bowiem, że czytelnik zainteresowany głębszymi rozważaniami teoretycznymi sięgnie po kolejne pozycje z literatury, a czytelnik nakierowany na zastosowania praktyczne nabierze doświadczenia przy samodzielnym prowadzeniu oszacowań. Z modelowaniem jest bowiem tak, jak z pływaniem. Nie można się tego nauczyć „na sucho". Tylko samodzielne szacowanie parametrów kolejnych modeli (i zastanawianie się nad interpretacją uzyskanych wyników) pozwala na zrozumienie zależności występujących pomiędzy zmiennymi i sposobu oddziaływania jednych zmiennych na drugie, czyli po prostu na dobre zrozumienie mechanizmów modeli.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Przyjmujemy też zasadę, że w trakcie lektury czytelnik nabiera doświadczenia. W związku z tym wyjaśnienia w początkowych rozdziałach są dokładniejsze niż w dalszych. Tempo wykładu rośnie a liczba wyjaśnianych szczegółów maleje z rozdziału na rozdział.

W rozdziale 1 przedstawiamy podstawowe wiadomości na temat analizy szeregów czasowych oraz dokonujemy przeglądu tak zwanych faktów empirycznych dotyczących finansowych szeregów czasowych. Własności te stanowią podstawę do konstrukcji i stosowania konkretnych modeli. Z tego powodu dobre zrozumienie materiału przedstawionego w tym rozdziale jest bardzo istotne jako pozwalające na wyrobienie właściwej intuicji.

Rozdział 2 poświęcony jest przedstawieniu modeli AR, MA i ARMA. Ekonometria finansowa koncentruje się przede wszystkim na zależnościach nieliniowych. Jednak przy stosowaniu większości testów wykrywających istnienie tych zależności oraz szacowaniu modeli zmienności istotne znaczenie ma poprawna specyfikacja średniej warunkowej.

W rozdziale 3 omawiamy ogólną konstrukcję modelu zmienności i wprowadzamy modele ARCH(q) oraz GARCH(p,q). Charakteryzujemy również rozkłady błędu zwykle stosowane w modelach GARCH. Ponadto rozdział ten zawiera przegląd testów, które można wykorzystywać jako narzędzia oceny dopasowania modelu, oraz miar jakości prognoz.

Rozdział 4 zawiera rozwinięcie teorii dotyczącej modeli GARCH stanowiących najpopularniejszą rodzinę modeli zmienności. Przedstawiamy kolejne rozszerzenia i modyfikacje klasycznego modelu GARCH(p,q) oraz ich zastosowania w praktyce modelowania. Prezentujemy też metody estymacji modeli GARCH.

W rozdziale 5 zajmujemy się badaniem występowania zależności długookresowych w szeregach stóp zwrotu z instrumentów finansowych. Przedstawiamy modele, które mogą wychwycić to zjawisko, i omawiamy wybrane testy długiej pamięci i stacjonarności.

Rozdział 6 poświęcony jest tematyce zmienności zrealizowanej stanowiącej jeden z głównych w nurtów ekonometrii finansowej. Analizujemy pewne aspekty teoretyczne i praktyczne tego pojęcia i w tym kontekście rozważamy problemy jakości prognoz zmienności oraz adekwatnej miary zmienności.

Bardzo krótki rozdział 7 zawiera podstawowe informacje o modelach dwuliniowych i wyjaśnia ich znaczenie w modelowaniu zależności nieliniowych.

Rozdział 8 dotyczy modeli zmienności stochastycznej. Zarówno klasa modeli dwuliniowych, jak i klasa modeli zmienności stochastycznej są postrzegane jako konkurencyjne dla modeli GARCH. Jednak, o ile w wypadku modeli dwuliniowych walka jest przegrana, o tyle modele zmienności stochastycznej zdobywają coraz większą popularność, przede wszystkim w zastosowaniach związanych z wyceną instrumentów pochodnych.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Rozdział 9 jest pierwszym z trzech poświęconych modelowaniu wartości zagrożonej (*Value at Risk* – VaR). Definiujemy w nim podstawowe pojęcia i omawiamy metodę obliczania VaR wykorzystującą oszacowania zmienności, a także przedstawiamy testy pozwalające na ocenę jakości prognoz VaR.

W rozdziale 10 wprowadzamy metodę regresji kwantylowej i przedstawiamy zastosowanie, wywodzących się z niej modeli CAViaR, do szacowania wartości zagrożonej.

Rozdział 11 zawiera rozważania na temat modeli przełącznikowych pozwalających na modelowanie dynamiki szeregów czasowych, w sytuacji gdy jest ona niejednorodna. Omawiamy w nim modele przełącznikowe Hamiltona oraz modele GARCH z przełączaniem typu Markowa, a także, choć mniej dokładnie, modele wygładzonego przejścia.

W rozdziale 12 przechodzimy do świata modeli wielowymiarowych i charakteryzujemy kilka wybranych typów modeli M-GARCH, zwracając szczególną uwagę na ich uproszczone wersje, które mogą być przydatne w zastosowaniach praktycznych w dynamicznej analizie zależności występujących pomiędzy instrumentami dużych portfeli.

Rozdział 13 stanowi naturalną kontynuację rozdziału 12 i jest poświęcony problemowi szacowania wartości zagrożonej dla portfela.

Przedostatni podrozdział każdego rozdziału zawiera prezentację praktycznego działania opisanych w obejmującym rozdziale metod i modeli. Estymacja modeli i obliczenia wykonywane są dla wybranych szeregów z polskiego rynku finansowego. W większości przykładów występują szeregi procentowych logarytmicznych stóp zwrotu indeksów WIG i WIG20, kursu walutowego USD/PLN, akcji spółek Agora i PKN Orlen oraz stopy procentowej WIBOR 3M pochodzące z lat 1995–2003. Szeregi są zróżnicowane i zostały wybrane tak, aby można było na ich przykładzie dobrze zilustrować praktyczne problemy pojawiające się w procesie modelowania. Nie bez znaczenia jest także to, że bardziej szczegółową analizę własności tych szeregów można znaleźć we wspomnianej monografii autorów niniejszej książki z 2004 roku.

Wszystkie obliczenia przedstawione w książce zostały wykonane za pomocą pakietów G@RCH™5, Time Series Modelling v4.26 i SsfPack działających w środowisku Ox™ oraz programu MATLAB®.

Kończące każdy rozdział uwagi i komentarze zawierają odniesienia do literatury i wskazówki dotyczące źródeł pozwalających na poszerzenie przedstawionych treści, a czasami jeszcze na pewne spostrzeżenia dotyczące dyskusyjnych aspektów teoretycznych bądź praktycznych rozważanej tematyki. Przedstawiony tu wybór literatury w żadnym razie nie jest pełny. Wskazane pozycje mają tylko dać czytelnikowi informację o książkach i artykułach, w których może znaleźć więcej wiadomości na temat interesujących go zagadnień. Również dane na

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

temat prac opisujących badania odnoszące się do polskiego rynku finansowego nie są pełne. Chodziło nam raczej o to, by wskazać grupy badawcze i osoby zajmujące się w Polsce omawianymi zagadnieniami.

Najważniejsze szeregi czasowe wykorzystywane w przykładach empirycznych stanowiących ilustracje do przedstawianych rozważań teoretycznych są dostępne na stronie internetowej: http://kms.ue.poznan.pl/doman/Modelowanie/Szeregi.zip.

Ponieważ materiał zawarty w tej książce powstał w ramach wykładów do wyboru, nie byłoby jej, gdyby nie liczne grupy studentów co roku zgłaszających chęć wysłuchania tych wykładów. Bardzo im dziękujemy nie tylko za to, że wybrali nasze wykłady, ale także za to, że przez swoje pytania i wątpliwości zmuszali nas do ciągłej pracy nad ich treścią. Szczególne podziękowania należą się studentom, którzy w roku akademickim 2005/2006 studiowali w Akademii Ekonomicznej w Poznaniu na IV roku specjalności cybernetyka ekonomiczna i wystąpili z inicjatywą uruchomienia wykładów z zakresu modelowania zmienności i ryzyka.

Żadna książka ani żaden wykład nie są doskonałe. Uważny czytelnik zawsze znajdzie błędy czy usterki. Zapewne niejeden specjalista, przeglądając naszą książkę, pomyśli „można to było zrobić lepiej". Na pewno można było. Dlatego też będziemy wdzięczni czytelnikom za wszelkie uwagi i komentarze, które prosimy nadsyłać na adres: malgorzata.doman@ue.poznan.pl lub rydoman@amu.edu.pl.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

1

Empiryczne własności finansowych szeregów czasowych

Głównym celem analizy finansowych szeregów czasowych jest stworzenie aparatu teoretycznego i praktycznego wykorzystywanego w dynamicznej wycenie szeroko rozumianych instrumentów finansowych (np. papierów wartościowych, walut obcych, instrumentów pochodnych, indeksów giełdowych). Szczególną cechą odróżniającą finansowe szeregi czasowe od innych szeregów empirycznych jest niepewność zawarta nie tylko w danych, ale także związana z brakiem jednoznacznego określenia używanych pojęć, np. zmienności ceny instrumentu finansowego, która jest wielkością nieobserwowalną bezpośrednio. Typowym dla większości empirycznych badań w ekonomii problemem powiększającym jeszcze tę niepewność jest konieczność wnioskowania statystycznego na podstawie jednego tylko szeregu obserwacji, który wcale nie musi pochodzić od ciągu zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie. Zastosowanie analizy szeregów finansowych w praktyce finansów wymaga często oceny rozkładów warunkowych tych zmiennych w celu określenia, np. jak zmienia się ocena poziomu ryzyka w zależności od zmiany w czasie wpływających na nie czynników.

Podstawowym obiektem badań w analizie finansowych szeregów czasowych są szeregi stóp zwrotu (stóp zmian) cen instrumentów finansowych. Są ku temu powody dwojakiego rodzaju. Pierwszy jest pochodną tego, że – z punktu widzenia przeciętnego inwestora – rynek finansowy może być traktowany jako bliski doskonale konkurencyjnemu, a zatem wielkość inwestycji nie wpływa na zmiany cen. W konsekwencji stopa zwrotu nie zależy od skali i zawiera pełną informację rozstrzygającą o podjęciu inwestycji. Drugi powód jest natury praktycznej i wiąże się z tym, że szeregi stóp zwrotu mają bardziej użyteczne dla analizy statystycznej własności niż szeregi cen.

szeregi stóp zwrotu cen instrumentów finansowych jako podstawowy obiekt badań

W tym rozdziale, po krótkim omówieniu wstępnych pojęć, przedstawiamy podstawowe własności i zależności obserwowane w szeregach stóp zwrotu

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

z instrumentów finansowych. Znajomość tych faktów jest najważniejszym czynnikiem pozwalającym na konstruowanie i dobór modeli wykorzystywanych w opisie i wyjaśnianiu mechanizmów rynków finansowych oraz ich prognozowaniu. Wiedząc ze wstępnych analiz, że w szeregu czasowym występuje określony typ zależności, możemy to skutecznie wykorzystywać w specyfikacji modelu.

1.1. Procesy stochastyczne i szeregi czasowe

Nasze rozważania będziemy prowadzić w ramach pewnego formalnego podejścia, które przedstawimy tu na dwa sposoby: intuicyjnie, z myślą o czytelnikach, którzy nie zaliczyli odpowiednio zaawansowanego kursu z rachunku prawdopodobieństwa, oraz ściśle, dla tych, którzy są z tą tematyką bardziej zaznajomieni.

Będziemy zakładać, że obserwowane w kolejnych odstępach czasu ceny instrumentów finansowych są realizacjami zmiennych losowych określonych na tej samej *przestrzeni probabilistycznej* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Pojęcie przestrzeni probabilistycznej wyjaśnione jest w tabeli 1.1.

Tabela 1.1. Określenie przestrzeni probabilistycznej

Zmienna	Wyjaśnienie intuicyjne	Definicja formalna
Ω	jest zbiorem „wszystkich możliwych stanów świata" (jeśli myślimy tylko o konkretnym instrumencie finansowym, to Ω może być zbiorem jego wszystkich możliwych cen).	jest zbiorem zdarzeń elementarnych.
$\mathcal{F}$	jest zbiorem rozważanych zdarzeń, czyli zbiorem podzbiorów zbioru Ω, który musi spełniać pewne naturalne ograniczenia.	jest σ-ciałem podzbiorów zbioru Ω.
P	jest funkcją, która zdarzeniom ze zbioru $\mathcal{F}$ przyporządkowuje prawdopodobieństwo ich zajścia.	jest σ-addytywną miarą probabilistyczną.

definicja zmiennej losowej

Wielkości obserwowane na rynkach finansowych, np. ceny instrumentów finansowych czy wielkość obrotu, są z reguły traktowane jako realizacje zmiennych losowych. Zmienna losowa jest funkcją określoną na zbiorze wszystkich możliwych stanów świata Ω przyjmującą wartości ze zbioru liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ (zmienne losowe jednowymiarowe) lub zbioru $\mathbb{R}^n$ (zmienne losowe wielowymiarowe, wektory losowe). Wartość zmiennej losowej zależy więc od zdarzenia elementarnego, które się zrealizuje, czyli od stanu świata, który zaistnieje. Zmienną losową charakteryzuje jej rozkład prawdopodobieństwa, czyli informacja o tym, z jakim prawdopodobieństwem zmienna losowa przyjmuje wartości z przedziałów

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

(w wypadku zmiennej losowej jednowymiarowej) albo z odpowiednich podzbiorów zbioru $\mathbb{R}^n$ (w wypadku wektora losowego).

proces stochastyczny

Rodzinę $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ zmiennych losowych określonych na tej samej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ nazywa się procesem stochastycznym. Zazwyczaj przyjmuje się, że zbiór indeksów $\mathbb{T}$ jest podzbiorem przedziału, $[0,+\infty)$ i interpretuje się go jako czas. Gdy zbiór $\mathbb{T}$ jest przeliczalny, mówimy, że rozpatrywany proces jest procesem z czasem dyskretnym, a gdy $\mathbb{T}$ jest przedziałem, mówimy o procesie z czasem ciągłym. Na proces stochastyczny można patrzeć jak na odwzorowanie X: $\mathbb{T}\times\Omega \to \mathbb{R}$, $(t,\omega) \to X_t(\omega)$, takie że dla dowolnych $t\in\mathbb{T}$ oraz $x\in\mathbb{R}$, zbiór $\{\omega\in\Omega : X(t,\omega) \le x\}$ należy do σ-ciała $\mathcal{F}$. Dla ustalonego $\omega_0\in\Omega$, proces stochastyczny X wyznacza odwzorowanie $\mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto X_t(\omega_0)$, które nazywa się realizacją lub trajektorią procesu X odpowiadającą zdarzeniu elementarnemu ω_0.

W ekonometrii finansowej, ale nie tylko, realizację procesu stochastycznego X, która, gdy $\mathbb{T} \subseteq \{1, 2, ...\}$, jest ciągiem (x_t) obserwacji $x_1, x_2, \ldots$, nazywa się szeregiem czasowym i oznacza (x_t). Powszechna jest także konwencja, która będzie również stosowana w tej książce, nazywania szeregiem czasowym, nie tylko realizacji procesu stochastycznego z czasem dyskretnym, ale również samego procesu, w sytuacjach gdy nie prowadzi to do nieporozumień. Przy tej konwencji, proces stochastyczny X oznacza się, tak samo jak szereg czasowy, symbolem (x_t), a zmienną losową X_t oznacza się, tak jak jej realizację, symbolem x_t.

zmienną losową i jej realizację oznaczamy tym samym symbolem

1.2. Pojęcie stacjonarności szeregu czasowego

Jednym z najważniejszych pojęć w statystycznej analizie szeregów czasowych jest stacjonarność.

ścisła stacjonarność

Szereg (r_t) nazywamy ściśle stacjonarnym, jeśli dla każdego ciągu $(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ indeksów oraz dla każdej liczby całkowitej s łączny rozkład wektora losowego $(r_{t_1}, r_{t_2}, \ldots, r_{t_k})$ jest taki sam, jak łączny rozkład wektora $(r_{t_1+s}, r_{t_2+s}, \ldots, r_{t_k+s})$.

kowariancyjna stacjonarność

Słaba (kowariancyjna) stacjonarność szeregu (r_t) oznacza, że zmienne (r_t) mają skończony drugi moment $(E(r_t^2) < \infty)$ oraz $E(r_t) = \mu$ i $\mathrm{cov}(r_t, r_{t+l}) = \gamma_l$ (dla dowolnych indeksów t i l. Oznacza to w szczególności, że wszystkie r_t mają tę samą skończoną wariancję γ_0, a kowariancja między r_t i r_s zależy jedynie od $|t - s|$.

Opracowano wiele testów stacjonarności szeregów czasowych. Nie będziemy się jednak nimi tu zajmować, ze względu na to, że w literaturze finansowej

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

powszechnie przyjmuje się założenie, iż stanowiące główny przedmiot naszych badań szeregi (r_t), gdzie r_t jest *stopą zwrotu* z instrumentu finansowego, tzn. $r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$, a P_t jest ceną instrumentu w momencie t, są słabo stacjonarne.

1.3. Funkcja autokorelacji

Rozważmy słabo stacjonarny szereg czasowy (r_t). Funkcja autokorelacji (*autocorrelation function* – ACF) przyporządkowuje liczbie całkowitej l współczynnik korelacji ρ_l między zmiennymi r_t i r_{t-l}:

$$\rho_l = \frac{\operatorname{cov}(r_t, r_{t-l})}{\sqrt{\operatorname{var}(r_t)\operatorname{var}(r_{t-l})}} = \frac{\operatorname{cov}(r_t, r_{t-l})}{\operatorname{var}(r_t)} = \frac{\gamma_l}{\gamma_0} \tag{1.1}$$

funkcja autokorelacji ACF

Z definicji tej wynika, że $\rho_0 = 1$, $\rho_l = \rho_{-l}$ oraz $-1 \le \rho_l \le 1$. Mówimy, że w szeregu (r_t) nie występuje autokorelacja, jeśli $\rho_0 = 1$ oraz $\rho_l = 0$ dla wszystkich $l > 0$.

Szereg czasowy (r_t) nazywa się ścisłym białym szumem (*strict white noise*), jeśli zmienne r_t tworzą ciąg niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie (*independent and identically distributed* – iid) ze skończoną średnią i wariancją. Jeśli ponadto zmienne r_t mają rozkład normalny z zerową średnią, to szereg (r_t) nazywa się gaussowskim białym szumem.

ścisły biały szum

biały szum

Jeśli zmienne r_t tworzą szereg kowariancyjnie stacjonarny i wartości ρ_l funkcji autokorelacji szeregu (r_t) są równe zeru dla wszystkich $l > 0$, to (r_t) nazywa się białym szumem (*white noise*).

Dla danego ciągu obserwacji $(r_t)_{t=1}^T$, niech $\bar{r}$ oznacza średnią z próby, tzn. $\bar{r} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_t$. Wówczas współczynnik autokorelacji z próby z opóźnieniem l określa się wzorem:

$$\hat{\rho}_l = \frac{\sum_{t=l+1}^{T} (r_t - \bar{r})(r_{t-l} - \bar{r})}{\sum_{t=1}^{T} (r_t - \bar{r})^2} \tag{1.2}$$

Przy pewnych ogólnych założeniach, $\hat{\rho}_l$ jest zgodnym estymatorem współczynnika autokorelacji ρ_l. Na przykład, jeśli (r_t) jest ciągiem iid, spełniającym warunek $E(r_t^2) < \infty$, to dla dowolnego całkowitego $l > 0$, $\hat{\rho}_l$ ma rozkład asymptotycznie normalny ze średnią 0 i wariancją $\frac{1}{T}$. Fakt ten może być wy-

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

korzystany w praktyce do testowania hipotezy zerowej H_0: $\rho_l = 0$, przeciw alternatywie H_a: $\rho_l \neq 0$. Rozkład statystyki testowej postaci $\sqrt{T}\hat{\rho}_l$ jest asymptotycznie standardowy normalny. Pozwala to wyliczyć 95-procentowe przedziały ufności, które na wykresach funkcji autokorelacji z próby w całej książce zaznaczone są poziomymi liniami.

hipoteza zerowa
H_0: $\rho_l = 0$

Ogólniej, jeśli (r_t) jest szeregiem słabo stacjonarnym spełniającym warunek $r_t = \mu + \sum_{i=0}^{q} \psi_i \varepsilon_{t-i}$, gdzie $\psi_0 = 1$, a (ε_j) jest gaussowskim białym szumem, to $\hat{\rho}_l$ ma rozkład asymptotycznie normalny z zerową średnią i wariancją $\frac{1}{T}\left(1 + 2\sum_{i=1}^{q}\rho_i^2\right)$, dla $l > q$.

Więcej informacji na temat rozkładów asymptotycznych współczynników autokorelacji z próby można znaleźć na przykład w książce Brockwella i Davisa (1991).

Przy badaniach zależności pomiędzy dwoma różnymi szeregami r_t i s_t wyznacza się ich korelacje z próby z opóźnieniem l. Wielkości te są określone wzorem:

$$\hat{\rho}_{r,s}(l) = \frac{\sum_{t=l+1}^{T}(r_t - \bar{r})(s_{t-l} - \bar{s})}{\sqrt{\sum_{t=1}^{T}(r_t - \bar{r})^2}\sqrt{\sum_{t=1}^{T}(s_t - \bar{s})^2}}$$

1.4. Testowanie normalności rozkładu

Jedno z pierwszych pytań, które stawia się przy analizie własności szeregów czasowych, dotyczy ich rozkładów. Długo przyjmowane, na ogół ze względów praktycznych, w literaturze finansowej założenie, że szeregi stóp zwrotu mają rozkład normalny, jest zwykle nieprawdziwe. Testowanie normalności rozkładu stóp zwrotu jest zwykle tylko formalnością, dlatego w badaniach finansowych stóp zwrotu stosuje się przeważnie tylko najprostsze metody sprawdzania tej własności. Omawiamy tu dwie z nich: test Jarque'a–Bery i wykres kwantyl-kwantyl. Załóżmy, że mamy ciąg obserwacji (próbę) $r_1, \ldots, r_T$.

test Jarque'a–Bery; hipoteza zerowa: rozkład jest normalny

1. Test Jarque'a–Bery (1980) (najpopularniejszy test normalności) oparty jest na statystyce:

$$JB_T = \frac{T}{6}b_1^2 + \frac{T}{24}(b_2 - 3)^2 \tag{1.3}$$

gdzie: b_1 jest empirycznym współczynnikiem skośności:

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

$$b_1 = \frac{\sum_{t=1}^{T}(r_t - \bar{r})^3}{\left(\sum_{t=1}^{T}(r_t - \bar{r})^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

a b_2 jest kurtozą empiryczną:

kurtoza empiryczna

$$b_2 = \frac{\sum_{t=1}^{T}(r_t - \bar{r})^4}{\left(\sum_{t=1}^{T}(r_t - \bar{r})^2\right)^{2}}$$

Statystyka JB_T przy hipotezie zerowej postulującej normalność ma rozkład asymptotyczny χ^2 (2).

2. Wykres kwantyl-kwantyl (*Q-Q plot*)
   Rozważmy ciąg obserwacji uporządkowany niemalejąco: $r_{(1)} \le r_{(2)} \le \ldots \le r_{(T)}$. Niech $q_{(j)}$ będzie kwantylem rzędu $\left(j - \frac{1}{2}\right)\Big/T$ zmiennej losowej Z mającej standardowy rozkład normalny, tzn. $P(Z \le q_{(j)}) = \left(j - \frac{1}{2}\right)\Big/T$. Wykres kwantyl-kwantyl dla próby $\{r_1, \ldots, r_T\}$ jest zbiorem $\Gamma = \{(q_{(j)}, r_{(j)}) \in \mathbb{R}^2 \mid j = 1, ..., T\}$.
   Jeśli próba $\{r_1, \ldots, r_T\}$ pochodzi z rozkładu normalnego, to zbiór Γ powinien w przybliżeniu zawierać się w prostej. Fakt ten można testować, wyznaczając współczynnik korelacji z próby dla ciągów $(q_{(1)}, q_{(2)}, \ldots, q_{(T)})$ i $(r_{(1)}, r_{(2)}, \ldots, r_{(T)})$ (Johnson i Wichern 1992).

1.5. Procentowe logarytmiczne stopy zwrotu

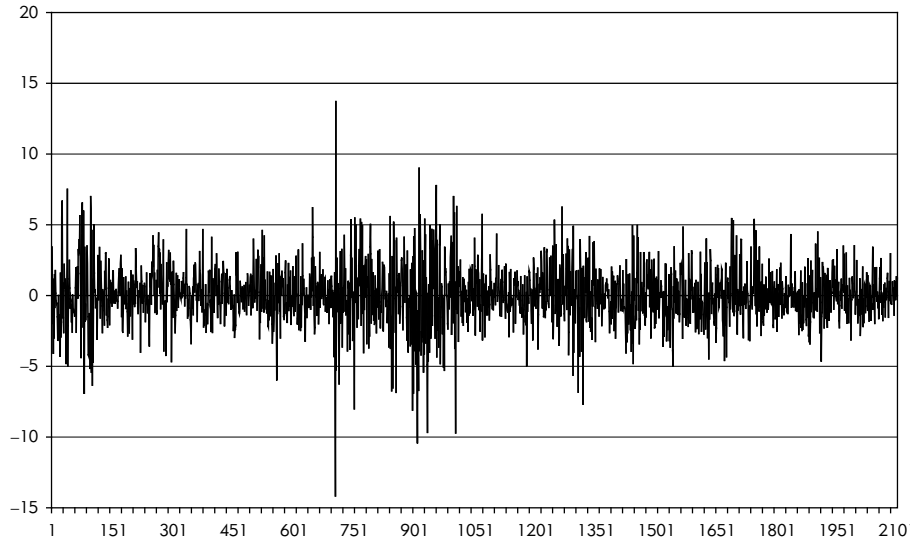
W dalszym ciągu, często zamiast określenia *stopa zwrotu* (*rate of return*) będziemy stosować krótsze i dość powszechnie stosowane w literaturze przedmiotu określenie *zwrot* (*return*). Z powodów głównie numerycznych (problemy z działaniami na liczbach bliskich zeru), wszystkie rozważane przez nas zwroty są procentowymi zwrotami logarytmicznymi, tzn. zwrot za okres od momentu $t - 1$ do t określony jest wzorem:

$$r_t = 100\,(\ln P_t - \ln P_{t-1}) \tag{1.4}$$

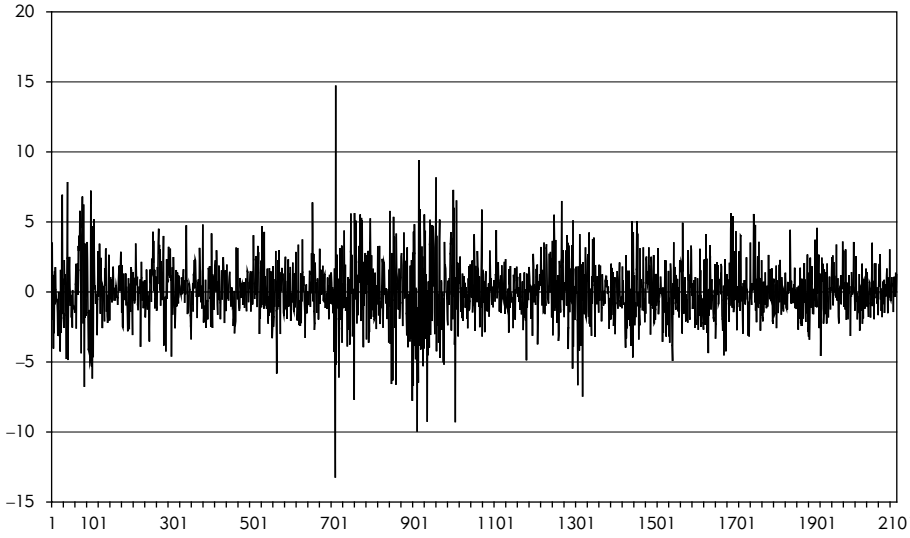
gdzie P_t oznacza cenę instrumentu finansowego w chwili t.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 1.1. Dzienne zwroty logarytmiczne indeksu WIG20 w okresie 2.01.1995–6.06.2003



Ilustracja 1.2. Dzienne zwroty proste indeksu WIG20 w okresie 2.01.1995–6.06.2003



Tak określone zwroty są powszechnie stosowane w badaniach naukowych dotyczących finansowych szeregów czasowych. Odmienne podejście obserwuje się w praktyce banków, różnych instytucji finansowych i poszczególnych inwestorów, w których częściej używane są wygodniejsze w analizie portfelowej zwroty proste:

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

powody stosowania zwrotów logarytmicznych

Znane są liczne argumenty uzasadniające stosowanie zwrotów logarytmicznych w badaniach teoretycznych. Korzyści natury praktycznej są następujące:

- łatwość wyliczania zwrotu za okres dłuższy przez agregację zwrotów z podokresów:

$$r_t[k] = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-k}}\right) = r_t + r_{t-1} + \cdots + r_{t-k+1}$$

- przyjmowanie przez zwrot logarytmiczny wartości z całej osi rzeczywistej, co jest istotne, gdy stosujemy w modelowaniu rozkłady prawdopodobieństwa z nieograniczonym nośnikiem (zwrot prosty przyjmuje wartości należące do przedziału $[-1,\infty)$);
- lepsze własności statystyczne;
- proces logarytmu ceny występuje często w stochastycznych równaniach różniczkowych (równaniach dyfuzji), będących podstawą modelowania zmienności w warunkach czasu ciągłego.

Jeżeli wartości bezwzględne analizowanych zwrotów nie są zbyt wysokie, to z rozwinięcia $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots$, prawdziwego dla $|x| < 1$, wynika, że różnica między zwrotem logarytmicznym a zwrotem prostym jest niewielka, przy czym w porównaniu z wartością bezwzględną zwrotu prostego, wartość bezwzględna zwrotu logarytmicznego jest niedoszacowana w wypadku zwrotów dodatnich i przeszacowana w wypadku zwrotów ujemnych. Fakt ten przedstawiają ilustracje 1.1 i 1.2.

1.6. Fakty empiryczne

zróżnicowanie charakteru szeregów w zależności od segmentu rynku

Mówiąc ogólnie o własnościach szeregów zwrotów cen instrumentów finansowych, trzeba mieć świadomość tego, że materiał statystyczny, na podstawie, którego formułuje się opinie, jest w istocie bardzo niejednorodny. Nieuniknione jest zróżnicowanie charakteru szeregów w zależności od segmentu rynku, z którego pochodzą. Na przykład, zwroty cen akcji mają nieco inne własności niż zwroty notowań indeksów albo zwroty kursów walutowych. Właściwości szeregu zależą również od częstotliwości obserwacji. Można jednak wyróżnić pewną grupę cech pojawia-

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

jących się w wynikach badań empirycznych, które to cechy są charakterystyczne dla przeważającej większości finansowych szeregów zwrotów logarytmicznych. Prawidłowości te wychwycone w wyniku analizy statystycznej wskazują na to, że mimo swojej różnorodności szeregi zwrotów finansowych mają istotne cechy wspólne. Literatura na temat tych własności, noszących w języku angielskim nazwę *stylized facts*, jest bogata.

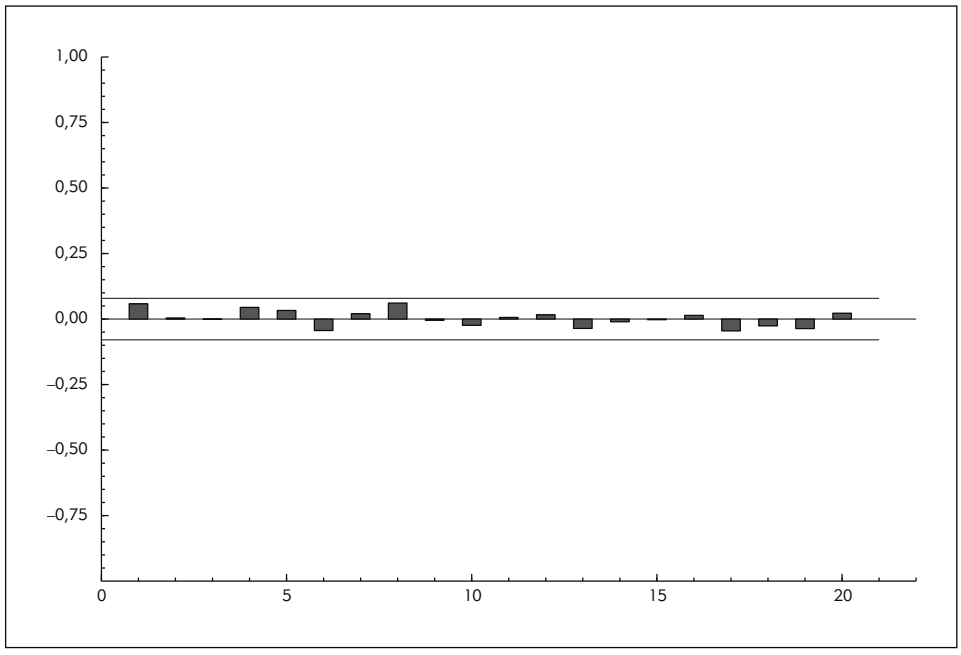
stylized facts

Omówimy obecnie najczęściej opisywane fakty empiryczne. Jako ilustracje tych faktów podajemy przykłady pochodzące głównie z polskiego rynku finansowego. Są to zarówno przykłady potwierdzające omawianą prawidłowość, jak i świadczące o występujących, zwłaszcza na polskim rynku finansowym, odstępstwach od niej. Przedstawione tu przykłady dotyczą na ogół dziennych stóp zwrotu, ale omawiane własności, w mniejszym lub większym stopniu, dotyczą też danych o innych częstotliwościach.

1.6.1. Brak autokorelacji

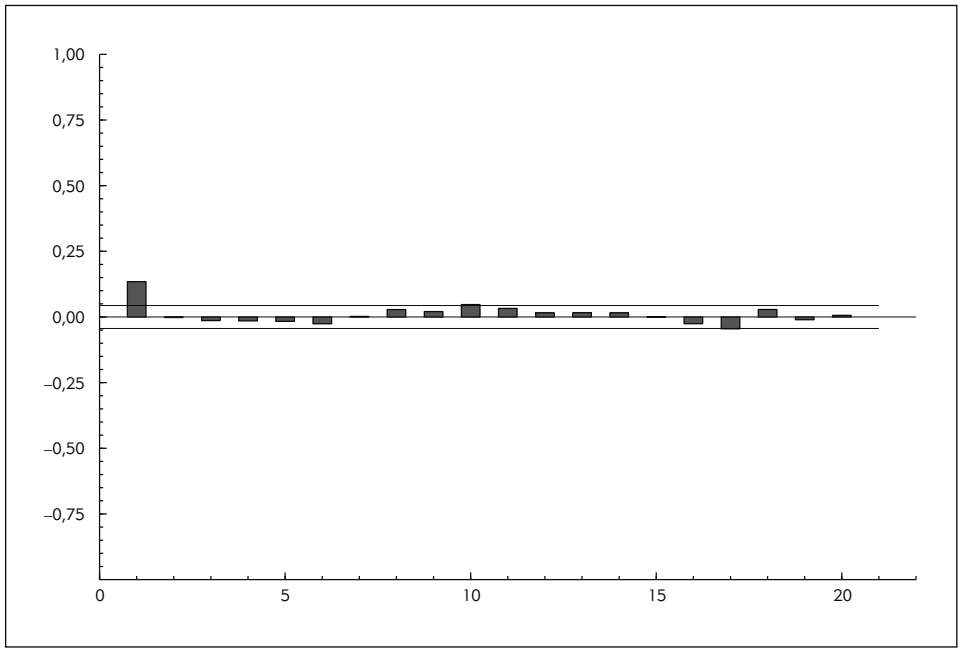
Autokorelacja w szeregach zwrotów jest z reguły statystycznie nieistotna, z wyjątkiem zwrotów śródziennych, w których zwykle pojawia się ona jako efekt tzw. mikrostruktury rynku. Na ilustracjach 1.3 i 1.4 przedstawiono przykłady dotyczące braku autokorelacji.

Ilustracja 1.3. Brak autokorelacji w szeregach zwrotów finansowych. Przykład potwierdzający prawidłowość: zwroty indeksu WIG20 w okresie 17.11.2000–6.06.2003



Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 1.4. Brak autokorelacji w szeregach zwrotów finansowych. Przykład sprzeczności z regułą: zwroty indeksu WIG w okresie 2.01.1995–6.06.2003



1.6.2. Grube ogony rozkładów i leptokurtoza

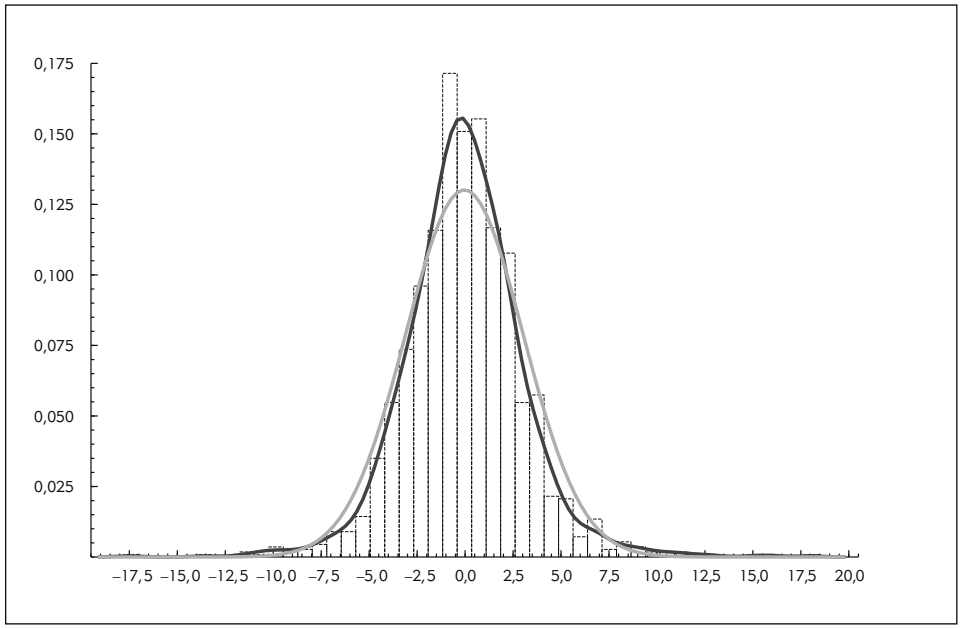
grube ogony rozkładów stóp zwrotu

Badania empiryczne powszechnie potwierdzają występowanie grubych ogonów w bezwarunkowych rozkładach zwrotów instrumentów finansowych (ilustracje 1.5 i 1.6). Typowe oszacowania kurtozy mieszczą się w granicach od 4 do 50, co wskazuje na duże odstępstwo od rozkładu normalnego. Indeks ogona rozkładu rozumiany jako rząd k najwyższego momentu bezwzględnego, który jest skończony, lub $k = \infty$, gdy wszystkie momenty są skończone, przyjmuje zwykle wartości pomiędzy 2 a 5, co wyklucza rozkład normalny.

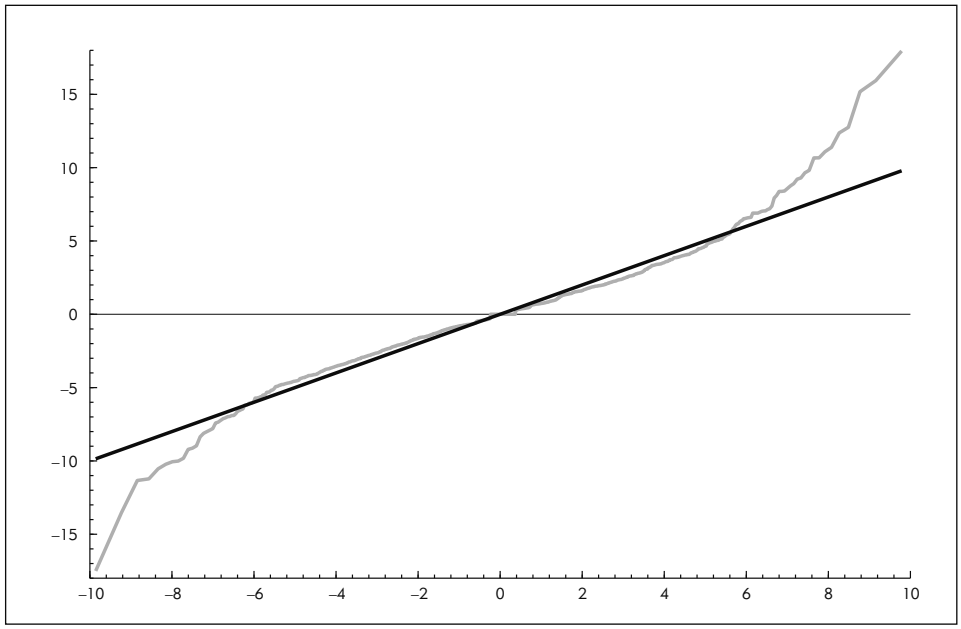
Grube ogony rozkładów stóp zwrotu oznaczają stosunkowo duże prawdopodobieństwo występowania obserwacji ekstremalnych.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 1.5. Grube ogony rozkładów i leptokurtoza. Przykład potwierdzający regułę: zwroty notowań spółki KGHM w okresie 7.01.1997–6.06.2003 (empiryczna kurtoza = 6,5738; empiryczna skośność = 0,2495)

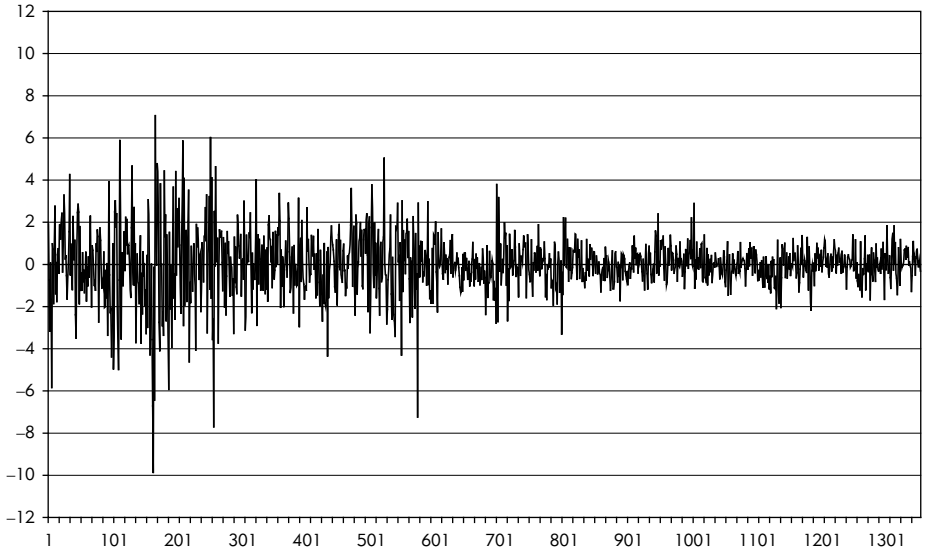


Ilustracja 1.6. Wykres kwantyl-kwantyl dla zwrotów notowań spółki KGHM w okresie 7.01.1997–6.06.2003

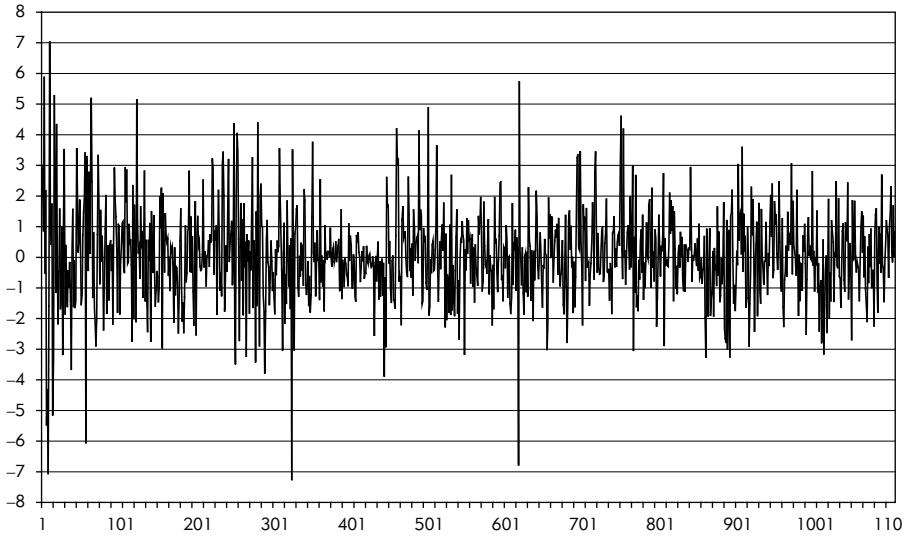


Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 1.7. Asymetria spadków i wzrostów. Przykład zgodności z regułą: zwroty indeksu MIDWIG w okresie 5.01.1998–6.06.2003



Ilustracja 1.8. Asymetria spadków i wzrostów. Przykład na sprzeczność z regułą: zwroty subindeksu WIG-banki w okresie 4.01.1999–6.06.2003



Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

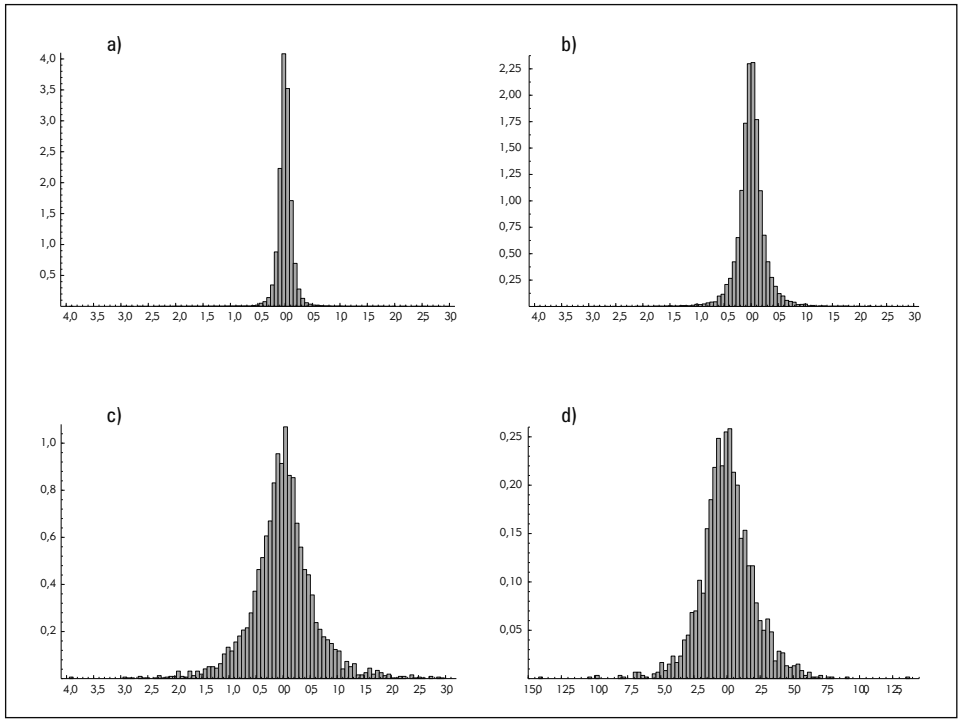
1.6.3. Asymetria spadków i wzrostów

W szeregach notowań akcji i indeksów giełdowych znaczne ruchy w dół często są co do wartości bezwzględnej większe niż znaczne wzrosty (ilustracje 1.7 i 1.8). Cecha ta rzadko pojawia się w szeregach kursów walutowych.

1.6.4. Dążenie do normalności przy agregacji

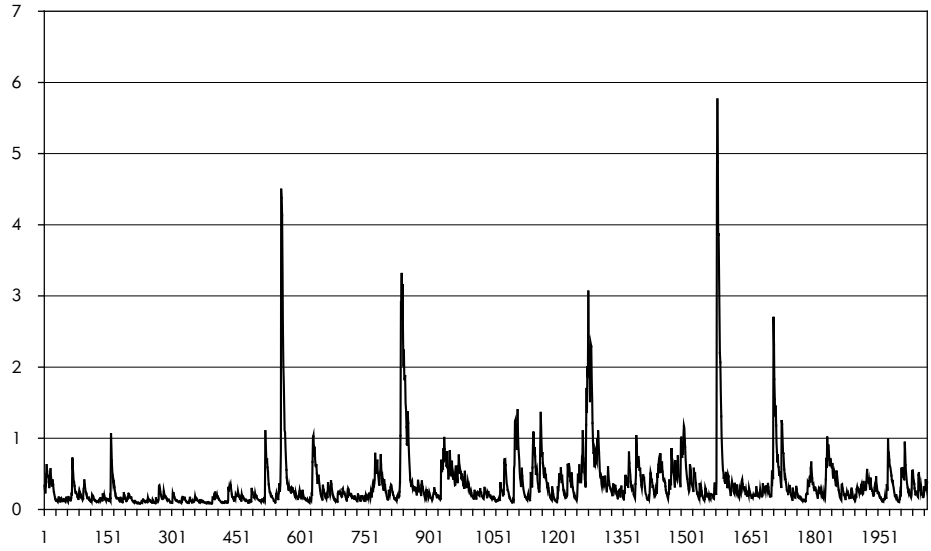
Przy zwiększaniu jednostki skali czasowej, względem której obliczane są zwroty, rozkład zwrotów upodabnia się do normalnego, a zatem kształt rozkładu zależy od skali czasowej (ilustracja 1.9).

Ilustracja 1.9. Dążenie do normalności przy agregacji. Przykład zgodności z regułą: zwroty pięciominutowe (a), piętnastominutowe (b), godzinne (c) i dzienne (d) indeksu WIG20

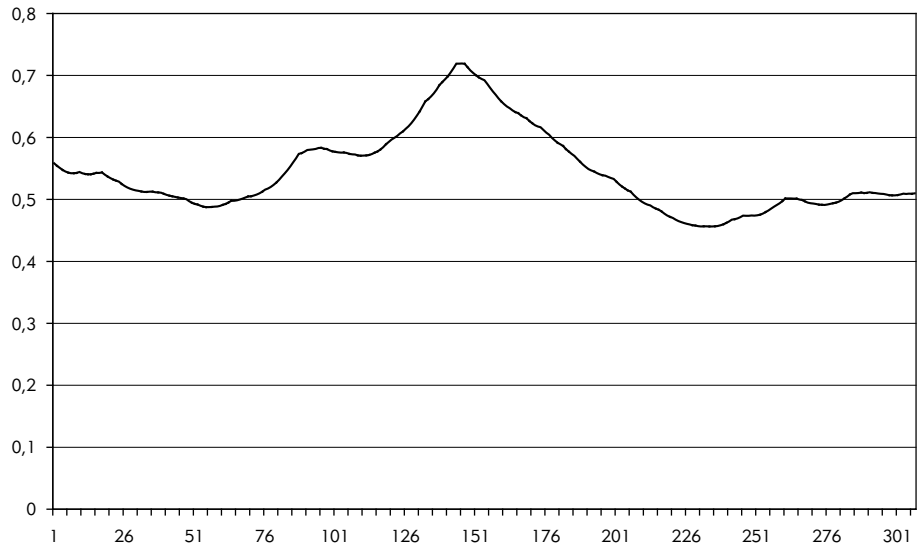


Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 1.10. Wahliwość. Przykład potwierdzający regułę: dzienna zmienność kursu walutowego USDPLN w okresie 2.01.1995–31.12.2002, wyestymowana za pomocą modelu APARCH. Widoczne powtarzające się okresy podwyższonej zmienności



Ilustracja 1.11. Wahliwość. Przykład niezgodności z regułą: dzienna zmienność kursu walutowego USDEUR w okresie 12.04.2000–7.03.2003, wyestymowana za pomocą modelu SV



Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

1.6.5. Wahliwość zmienności

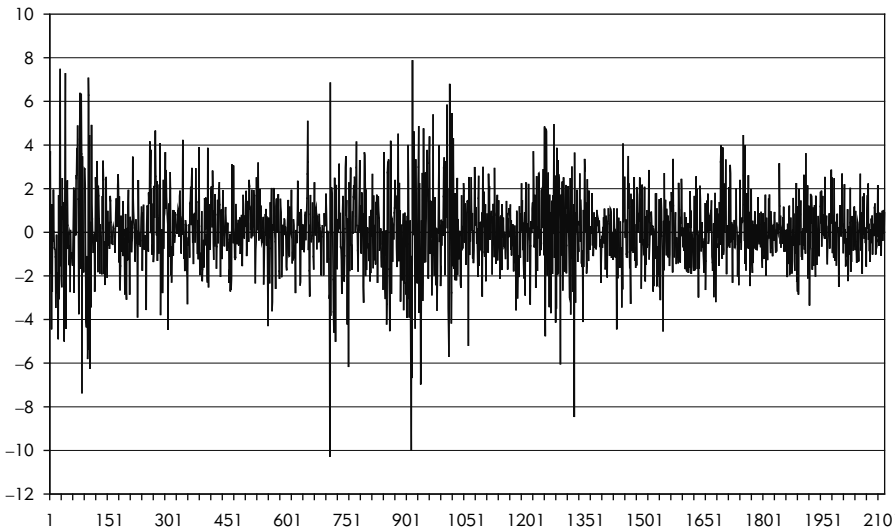
Zwroty wykazują – niezależnie od skali czasu – wysoki poziom wahliwości (ilustracje 1.10 i 1.11). Przejawia się on np. w tym, że w szeregach zmienności, bez względu na przyjęty sposób jej estymowania, pojawiają się okresy znacznie podwyższonego jej poziomu.

1.6.6. Zgrupowania zmienności

zgrupowania zmienności a występowanie dodatniej autokorelacji w szeregach zmienności

Po dużych ruchach cen występują często duże zmiany i podobnie po małych małe. Niezależnie od stosowanej miary zmienności charakterystyczne dla szeregów zwrotów jest występowanie okresów podwyższonej zmienności, po których następują okresy zmienności obniżonej (ilustracja 1.12). Jest to związane z dodatnią autokorelacją występującą w szeregach zmienności i uwidacznia się w postaci zgrupowań zmienności (*volatility clusters*).

Ilustracja 1.12. Zwroty logarytmiczne indeksu WIG w okresie 2.01.1995–6.06.2003



Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

1.6.7. Powracanie zmienności do średniej

Czasami formułuje się przekonanie, że po okresie podwyższonej zmienności następuje jej powrót do pewnego „normalnego" poziomu oraz że podobny powrót występuje po okresie zaniżonej zmienności. W długim okresie zmienność powinna powracać do określonego średniego poziomu. Uważa się, że jest to charakterystyczna cecha zmienności, aczkolwiek nie jest jasne, jaki jest ten „normalny" poziom ani czy jest on stały w czasie i nie zależy od zmian instytucjonalnych.

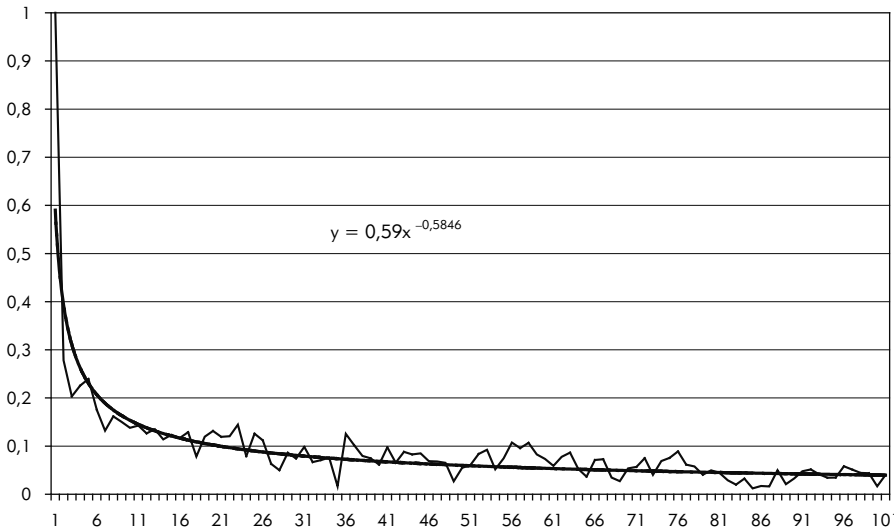
1.6.8. Grube ogony rozkładów warunkowych

Rozkłady warunkowe zwrotów również cechują się grubymi ogonami. Własność ta nie zanika zupełnie nawet po modyfikacji szeregu uwzględniającej zgrupowania zmienności, np. przez zastosowanie modeli typu GARCH. Szeregi reszt tych modeli nadal wykazują grube ogony (w nieco mniejszym stopniu).

1.6.9. Powolne zanikanie autokorelacji w szeregach zwrotów bezwzględnych

Autokorelacja z próby w szeregach wartości bezwzględnych stóp zwrotu zanika wolno, w tempie funkcji potęgowej o wykładniku od około –0,2 do –0,6 (ilustracja 1.13). Często uznaje się to za oznakę występowania zależności długoterminowej.

Ilustracja 1.13. Powolne zanikanie autokorelacji w szeregach zwrotów bezwzględnych. Funkcja autokorelacji z próby dla zwrotów bezwzględnych indeksu WIG maleje w tempie funkcji potęgowej o wykładniku około –0,58

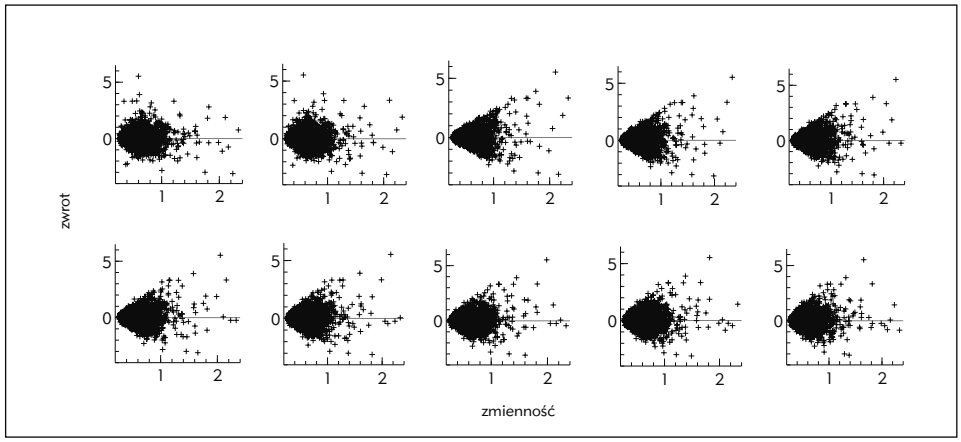


Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

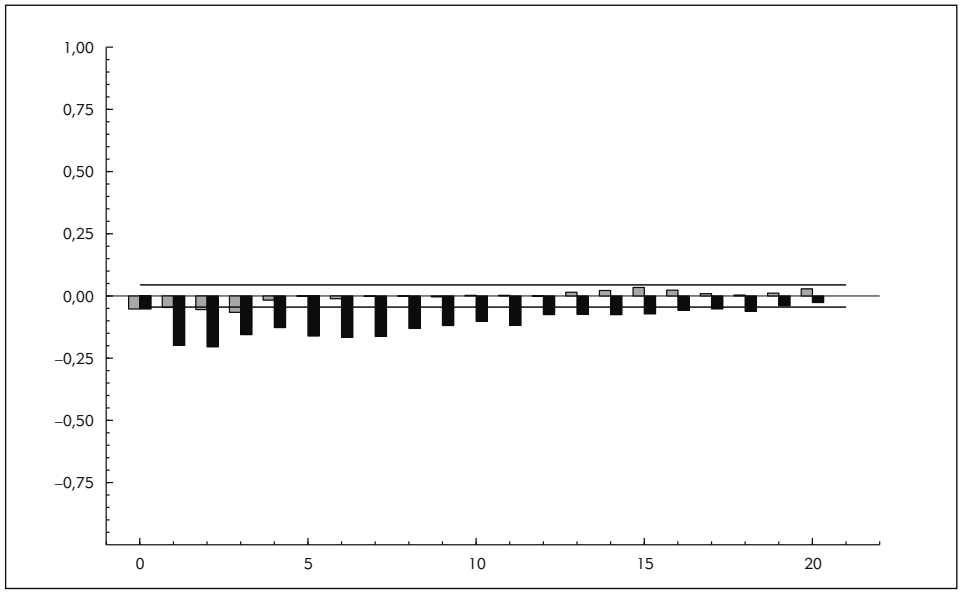
1.6.10. Efekt dźwigni

Zmienność w wypadku większości stosowanych miar jest ujemnie skorelowana z wielkością zwrotu (ilustracje 1.14 i 1.15).

Ilustracja 1.14. Efekt dźwigni. Przykład sprzeczności z regułą: wykresy punktowe zmienności wyestymowanej za pomocą modelu GARCH i zwrotów dla kursu EUR/PLN. Opóźnienia dla zwrotów zmieniają się od 0 do 9. Okres 16.05.1995–30.05.2003. Małym bezwzględnym wartościom zwrotów odpowiada mała zmienność, a dużym – duża. Brak ujemnej korelacji między zwrotami a zmiennością

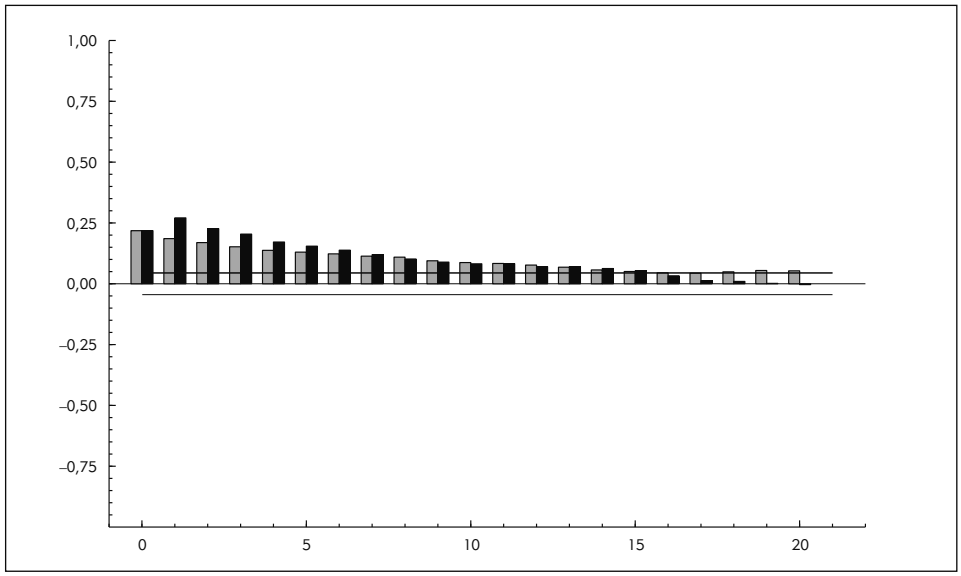


Ilustracja 1.15. Efekt dźwigni. Przykład zgodności z regułą: Mostostal. Ujemne korelacje między zmiennością wyestymowaną za pomocą modelu GARCH a wielkością zwrotu. Okres 04.05.1995–6.06.2003. Korelacje pomiędzy wolumenem a opóźnionym zwrotem (jasne słupki), korelacje pomiędzy zwrotem a opóźnionym wolumenem (ciemne słupki). Na osi poziomej liczby opóźnień

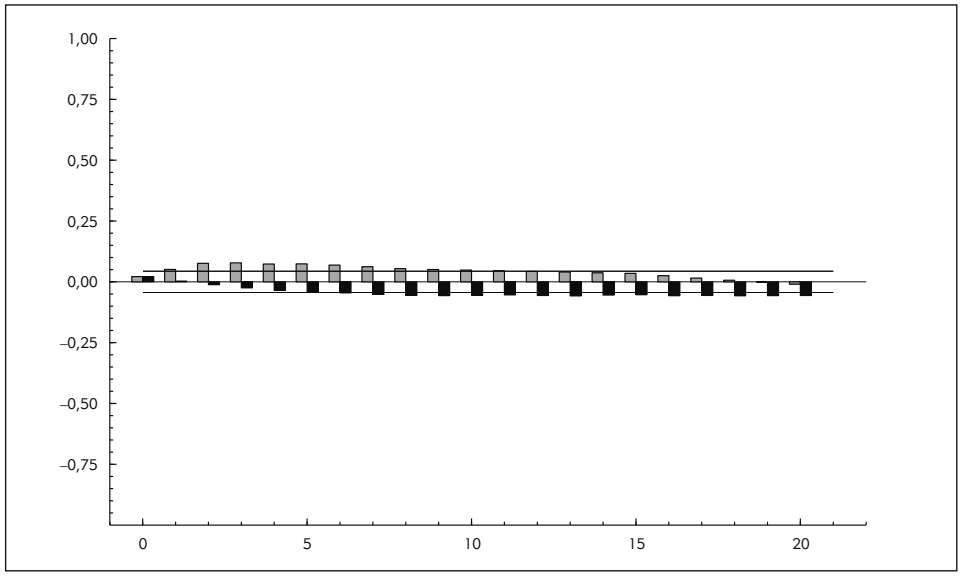


Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 1.16. Korelacja między zmiennością a wielkością obrotu. Przykład zgodności z regułą: Mostostal. Dodatnie korelacje między zmiennością wyestymowaną za pomocą modelu GARCH a wielkością wolumenu obrotu. Okres 4.05.1995–6.06.2003. Korelacje pomiędzy wolumenem a opóźnioną zmiennością (ciemne słupki), korelacje pomiędzy zmiennością a opóźnionym wolumenem (jasne słupki). Na osi poziomej liczby opóźnień



Ilustracja 1.17. Korelacja między zmiennością a wielkością obrotu. WIG. Stosunkowo słaby związek między zmiennością wyestymowaną za pomocą modelu GARCH a wielkością wolumenu obrotu. Okres 2.01.1995–6.06.2003. Korelacje pomiędzy wolumenem a opóźnioną zmiennością (jasne słupki), korelacje pomiędzy zmiennością a opóźnionym wolumenem (ciemne słupki). Na osi poziomej liczby opóźnień



Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

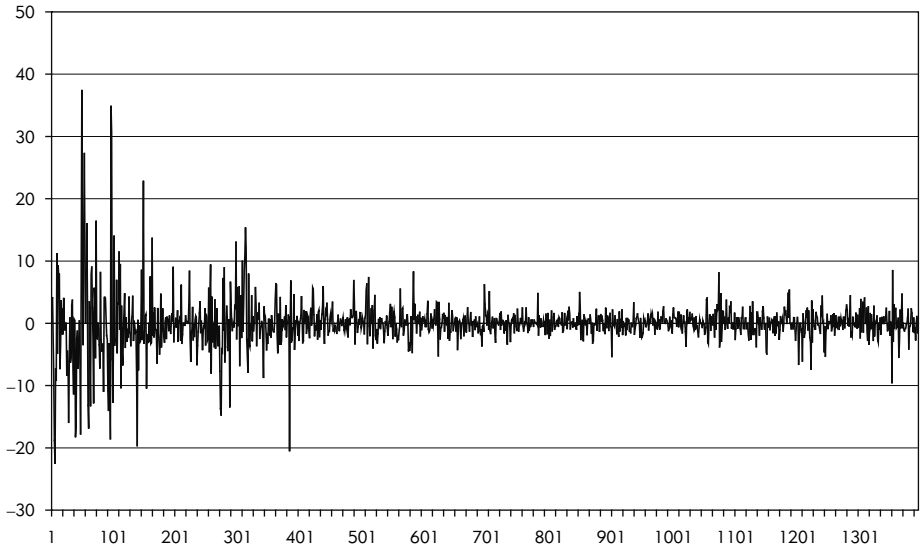
1.6.11. Korelacja między zmiennością a wielkością obrotu

Wielkość obrotu jest skorelowana ze wszystkimi miarami zmienności (ilustracje 1.16 i 1.17).

1.6.12. Zmiany strukturalne

W szeregach stóp zwrotu z instrumentów finansowych często występują zmiany strukturalne (ilustracja 1.18), które mogą być wywołane przez zmiany w otoczeniu rynku (zmiany przepisów prawnych, kryzysy finansowe itp.). Występowanie takich zmian znacznie utrudnia modelowanie i zwiększa znaczenie odpowiedniego doboru długości okresu próby, jeśli model ma być wykorzystany do prognozowania.

Ilustracja 1.18. Zmiana strukturalna (około 400 obserwacji) w szeregu stóp zwrotu spółki Netia. Okres 1.08.2001–16.02.2007



Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

1.7. Od teorii do praktyki

wybór szeregów

Każdą analizę ekonometryczną danych finansowych należy, w miarę możliwości, rozpocząć od przeanalizowania wykresów badanych szeregów. Szeregi stóp zwrotu, których badanie będzie przykładem prezentowanych przez nas metod, opisane zostały w tabeli 1.2 i przedstawione na ilustracjach 1.1, 1.12 oraz 1.19–1.22. Rozważamy dzienne notowania kursu walutowego USD/PLN, indeksów giełdowych WIG i WIG20, spółek Agora i PKN Orlen oraz stopy procentowej WIBOR 3M. W kilku przypadkach wyróżniamy szeregi zwrotów z podokresów po to, by lepiej zilustrować pewne aspekty ich dynamiki.

Wybór właśnie tych szeregów był podyktowany tym, że wykazują one zróżnicowaną i interesującą dynamikę, a także (a może nawet przede wszystkim) tym, że są one doskonale znane autorom, gdyż stanowiły, między innymi, przedmiot ich badań (Doman i Doman 2004).

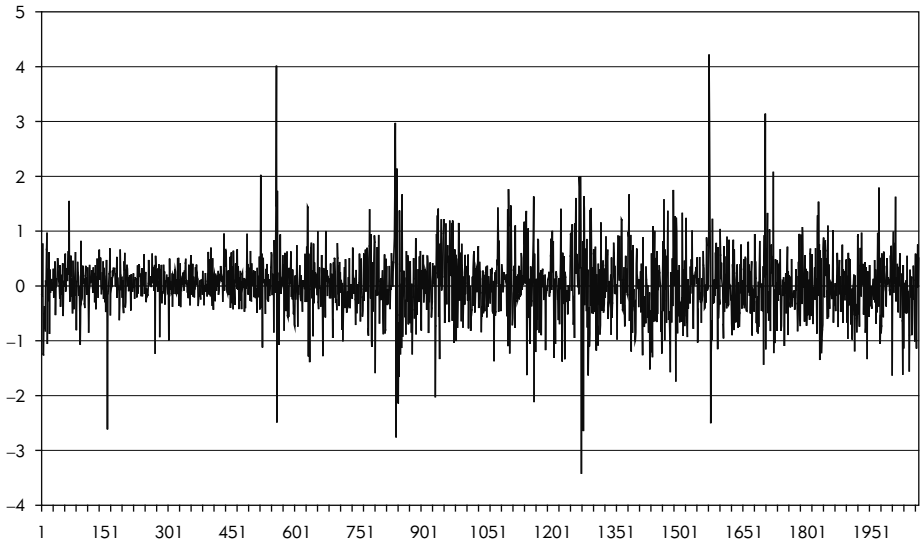
Tabela 1.2. Zestawienie szeregów czasowych wykorzystywanych w ilustracjach empirycznych

Instrument	Nazwa szeregu stóp zwrotu	Okres	Liczba obserwacji
WIG	WIG*d*	02.01.1995–06.06.2003	2105
	WIG*k*	17.11.2000–06.06.2003	637
WIG20	WIG20*d*	02.01.1995–06.06.2003	2105
	WIG20*k*	17.11.2000–06.06.2003	637
USD/PLN	USDPLN*d*	16.05.1995–06.06.2003	2065
	USDPLN*k*	12.04.2000–06.06.2003	813
Agora	Agora	21.04.1999–06.06.2003	1032
PKN Orlen	PKNOrlen	29.11.1999–06.06.2003	880
WIBOR 3M	WIBOR3M	03.01.1995–06.06.2003	2113

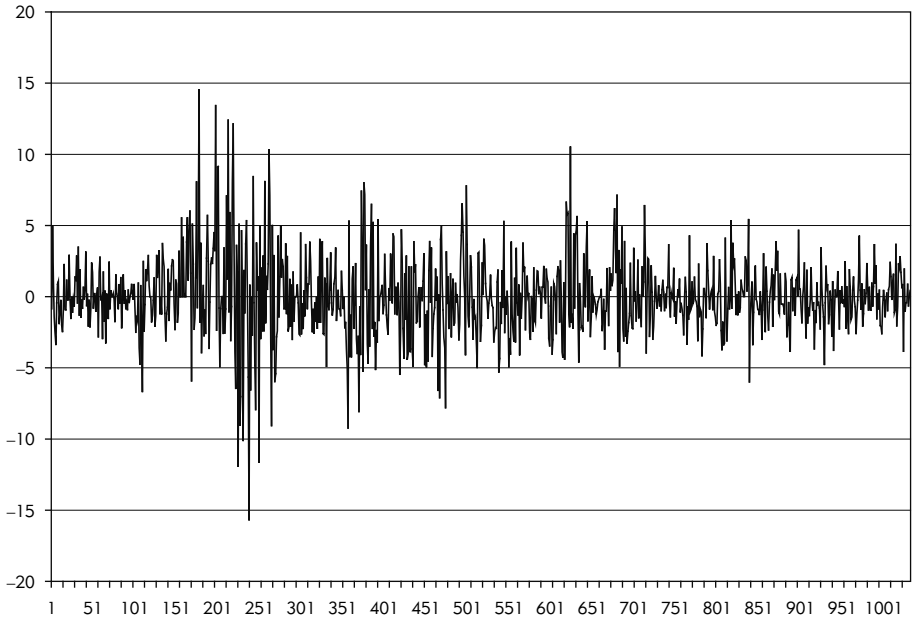
Spróbujmy teraz zastanowić się, jakie typowe własności empiryczne można zaobserwować w wypadku rozważanych przez nas szeregów. Tabela 1.3 przedstawia ich statystyki opisowe, a wykresy na ilustracjach 1.23–1.35 – oszacowania funkcji autokorelacji oraz porównanie rozkładów empirycznych z rozkładem normalnym.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 1.19. USDPLN*d*. Dzienne procentowe logarytmiczne stopy zwrotu.
Okres 16.05.1995–6.06.2003

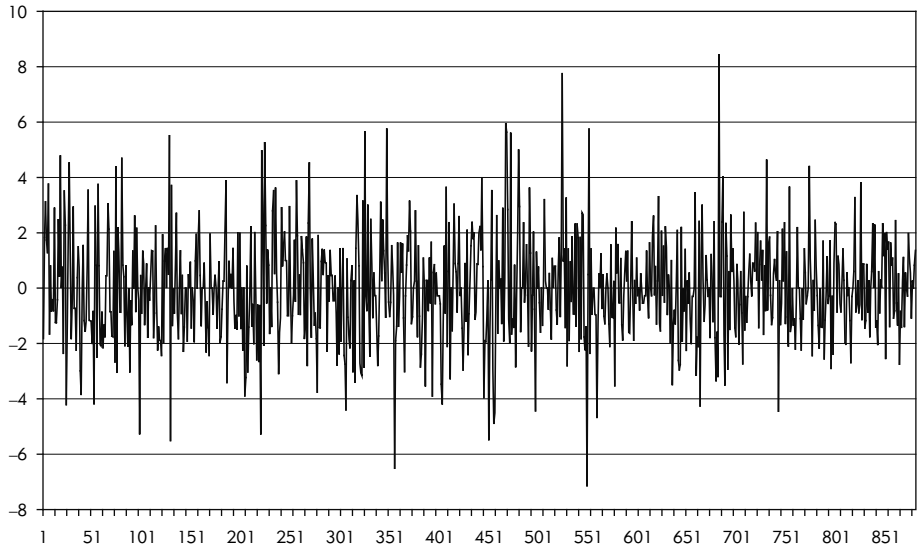


Ilustracja 1.20. Agora. Dzienne procentowe logarytmiczne stopy zwrotu.
Okres 21.04.1999–6.06.2003

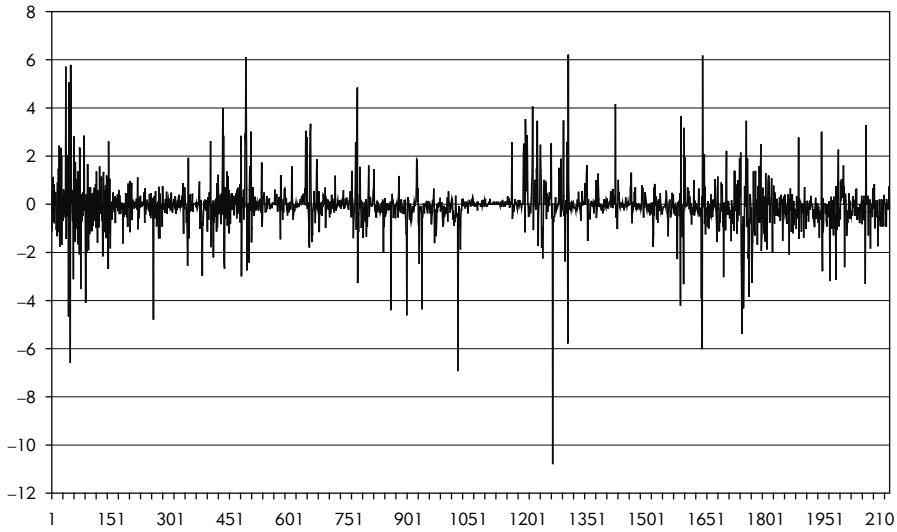


Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 1.21. PKN Orlen. Dzienne procentowe logarytmiczne stopy zwrotu. Okres 21.04.1999–6.06.2003



Ilustracja 1.22. WIBOR3M. Dzienne procentowe logarytmiczne zmiany poziomu. Okres 3.01.1995–6.06.2003



Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

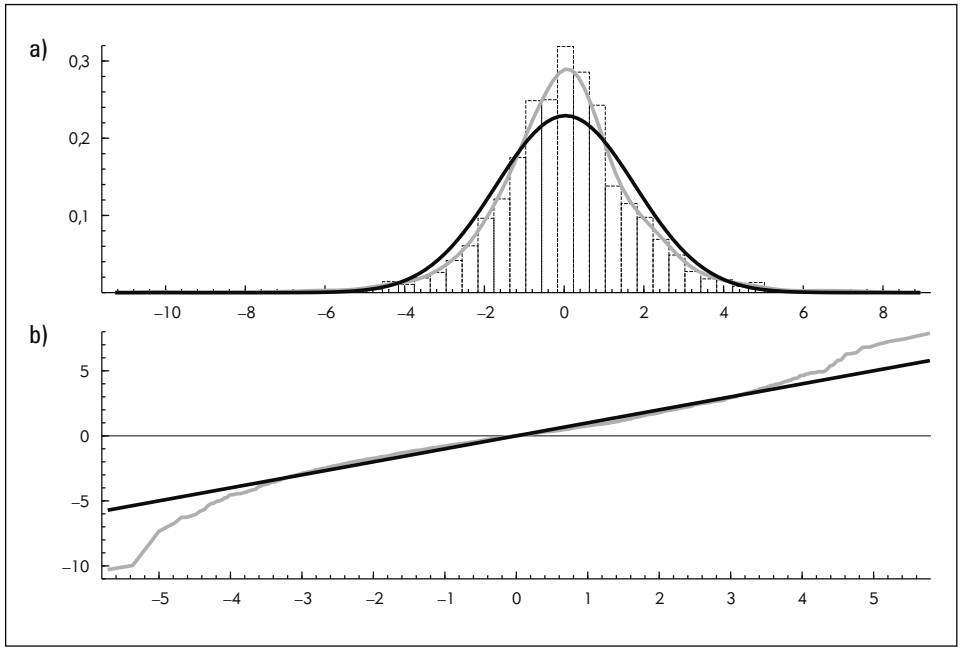
Tabela 1.3. Statystyki opisowe analizowanych szeregów stóp zwrotu

Szereg	Średnia	Odchylenie standardowe	Maximum	Minimum	Skośność	Kurtoza
WIG*d*	0,0350	1,7402	7,8933	–10,286	–0,1154	5,9444
WIG*k*	0,1261	1,0501	4,4845	–3,1554	0,3388	3,9261
WIG20*d*	0,0245	2,0720	13,709	–14,161	–0,0791	6,5275
WIG20*k*	–0,0446	1,6187	5,483	–5,0446	0,3189	3,6714
USDPLN*d*	0,0208	0,5802	4,2208	–3,4125	0,2683	8,3318
USDPLN*k*	–0,0115	0,6620	4,2208	–3,4125	0,4099	7,1069
Agora	–0,0015	2,8301	14,574	–15,719	0,2847	6,6323
PKNOrlen	–0,0202	1,9107	8,4557	–7,163	0,2681	4,0924
WIBOR 3M	–0,0796	0,9536	6,2153	–10,764	–0,5925	21,833

zróżnicowanie zachowania stóp zwrotu

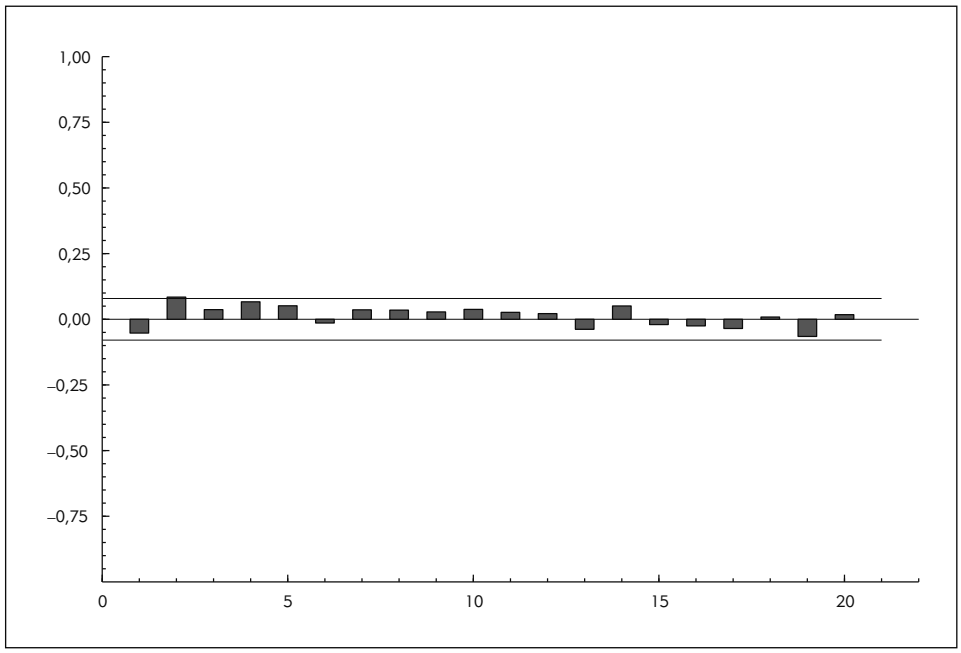
Nawet pobieżne spojrzenie na rysunki pozwala stwierdzić, że zachowania stóp zwrotu pochodzących z różnych segmentów rynku finansowego są bardzo odmienne. Najbardziej jest to widoczne w wypadku stóp zmian stopy procentowej WIBOR 3M. Niemniej, na wszystkich wykresach zauważyć można występowanie zgrupowań zmienności oraz obecność pojedynczych obserwacji o wielkości znacznie odbiegającej od przeciętnej. Można też wyróżnić pewne przejawy asymetrii.

Ilustracja 1.23. WIG*d*: a) histogram, empiryczna funkcja gęstości, funkcja gęstości rozkładu normalnego z empiryczną średnią i wariancją, b) wykres kwantyl-kwantyl

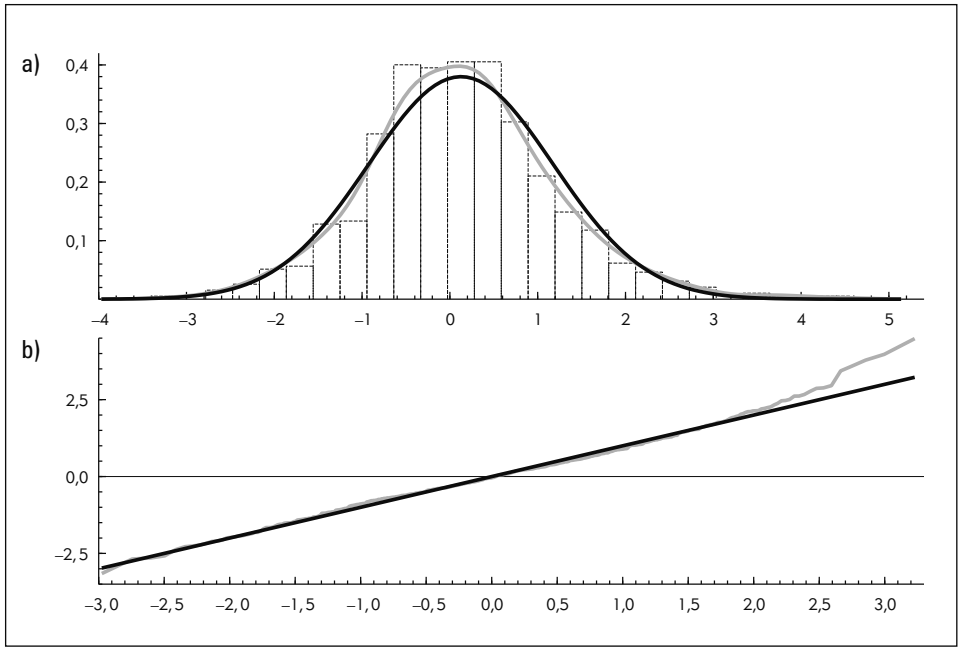


Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 1.24. WIG*k*. Oszacowanie funkcji autokorelacji

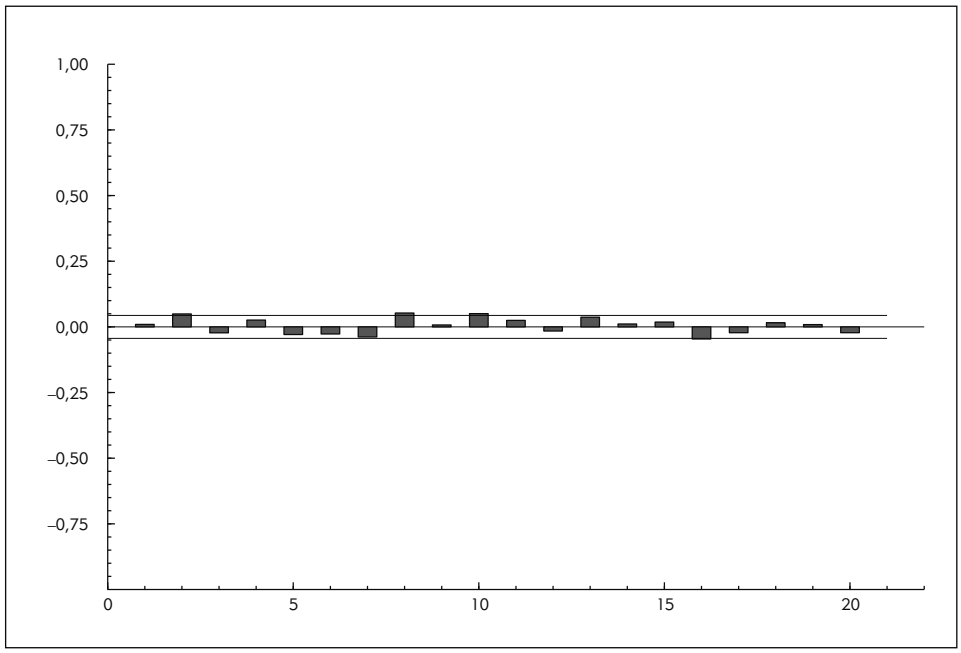


Ilustracja 1.25. WIG*k*: a) histogram, empiryczna funkcja gęstości, funkcja gęstości rozkładu normalnego z empiryczną średnią i wariancją, b) wykres kwantyl-kwantyl

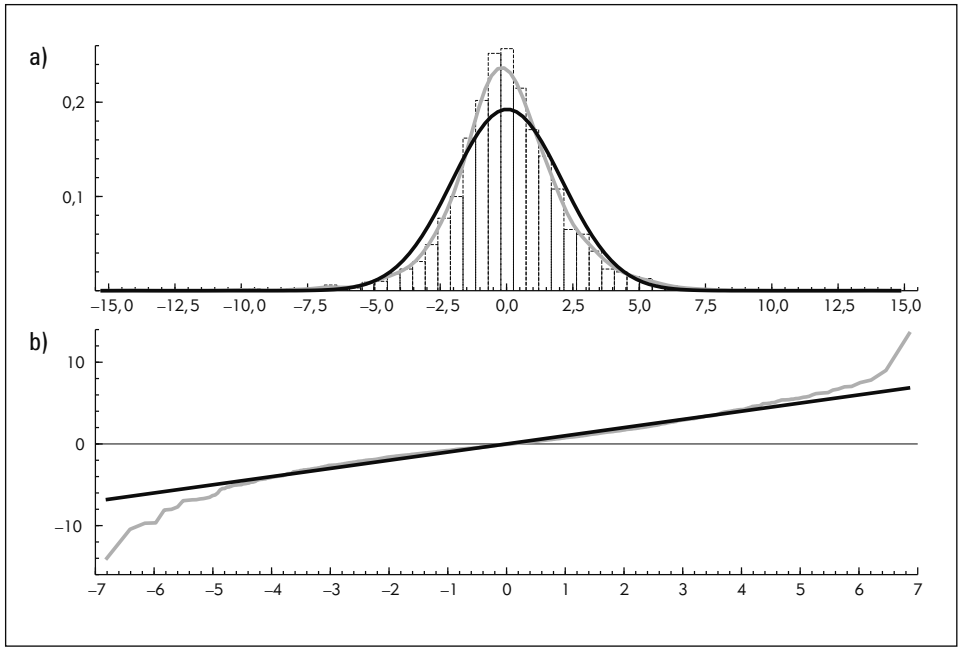


Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 1.26. WIG20*d*. Oszacowanie funkcji autokorelacji

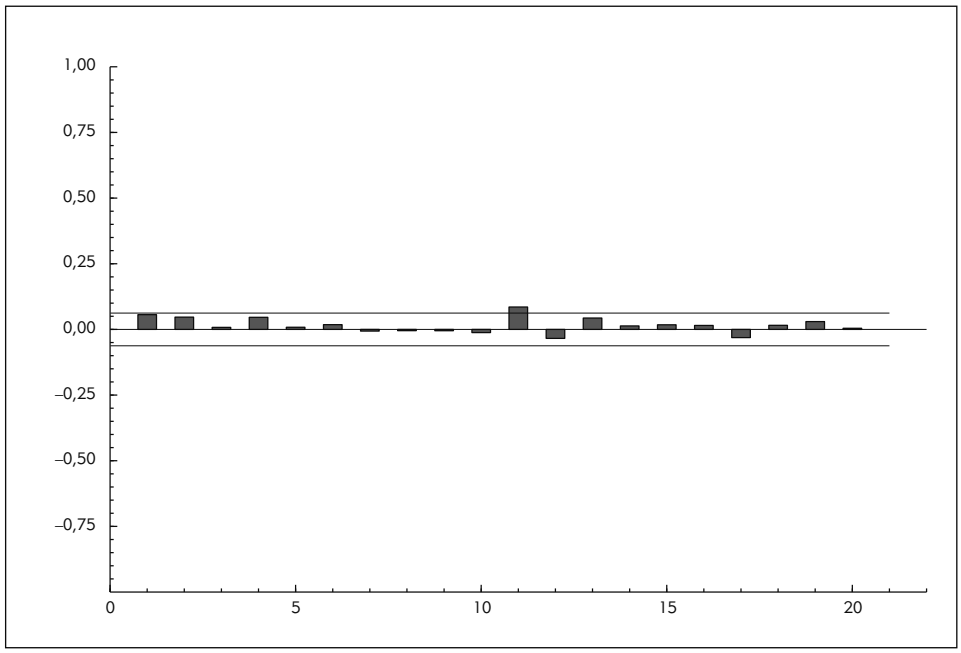


Ilustracja 1.27. WIG20*d*: a) histogram, empiryczna funkcja gęstości, funkcja gęstości rozkładu normalnego z empiryczną średnią i wariancją, b) wykres kwantyl-kwantyl

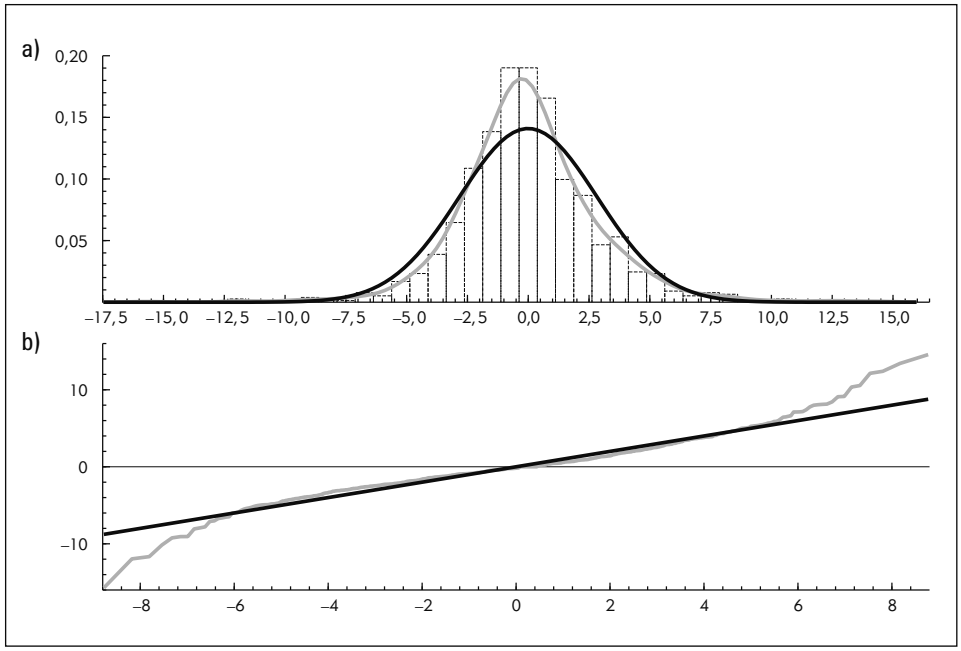


Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 1.28. Agora. Oszacowanie funkcji autokorelacji

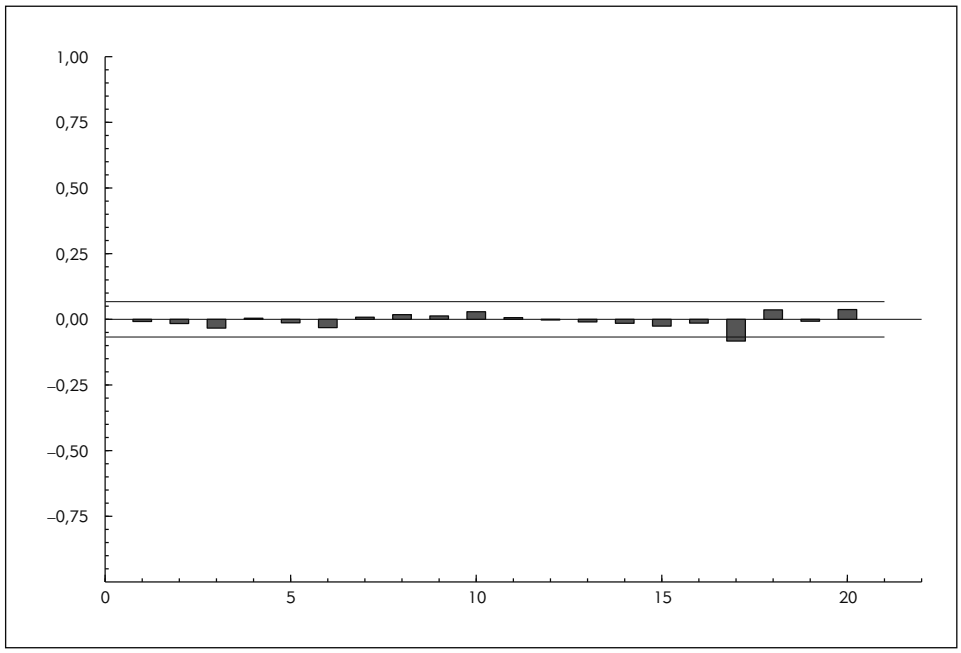


Ilustracja 1.29. Agora: a) histogram, empiryczna funkcja gęstości, funkcja gęstości rozkładu normalnego z empiryczną średnią i wariancją, b) wykres kwantyl-kwantyl

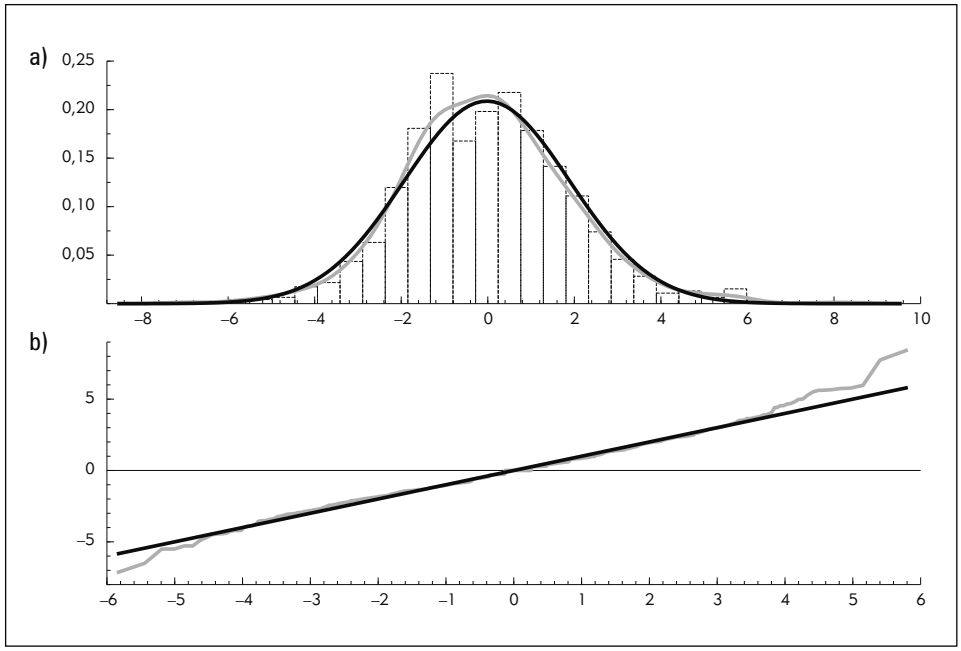


Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 1.30. PKN Orlen. Oszacowanie funkcji autokorelacji

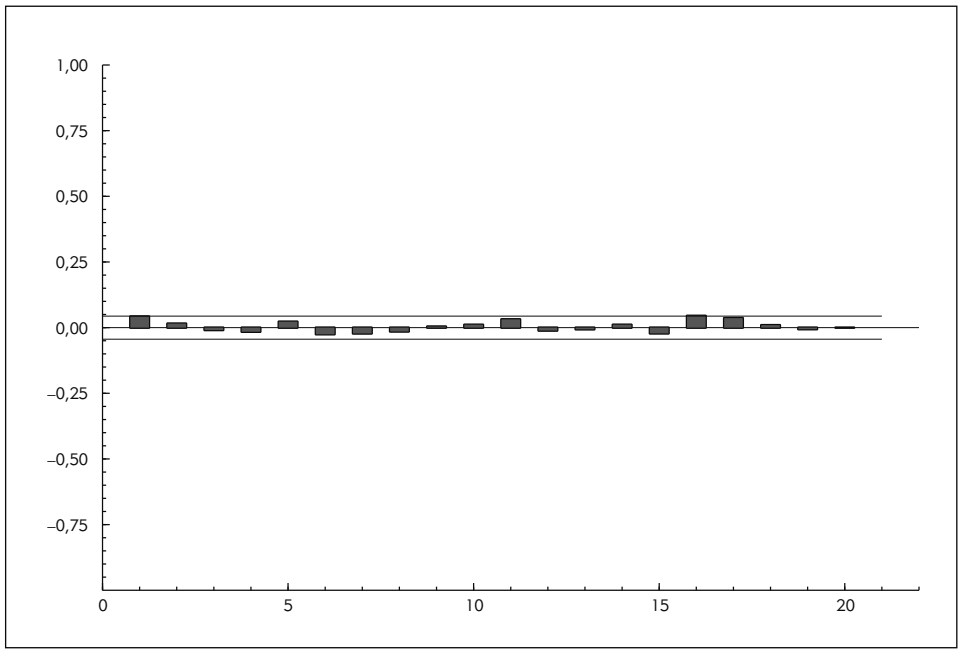


Ilustracja 1.31. PKN Orlen: a) histogram, empiryczna funkcja gęstości, funkcja gęstości rozkładu normalnego z empiryczną średnią i wariancją: b) wykres kwantyl-kwantyl

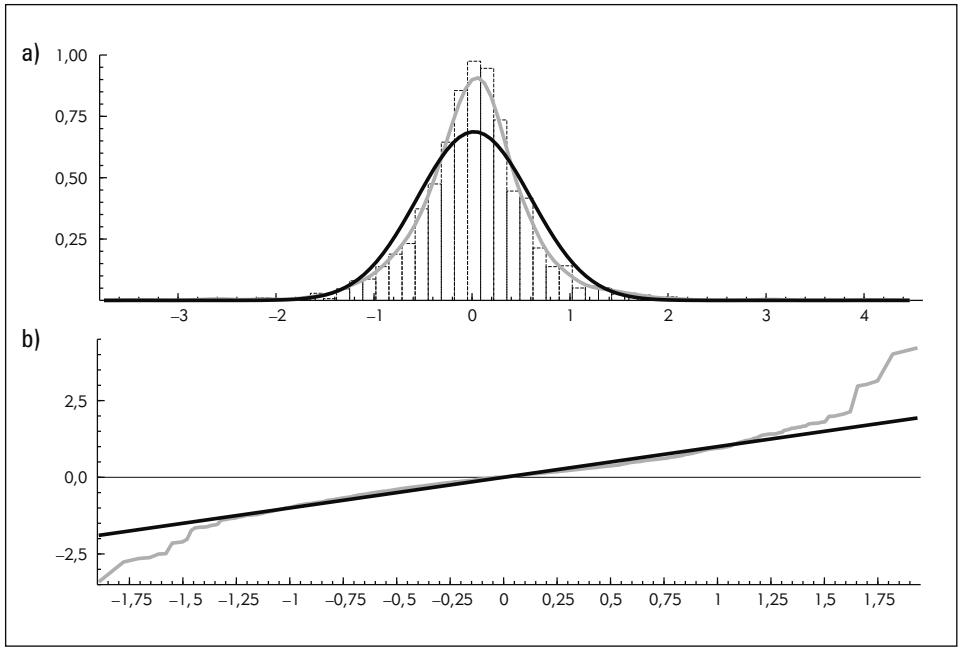


Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 1.32. USDPLN*d*. Oszacowanie funkcji autokorelacji

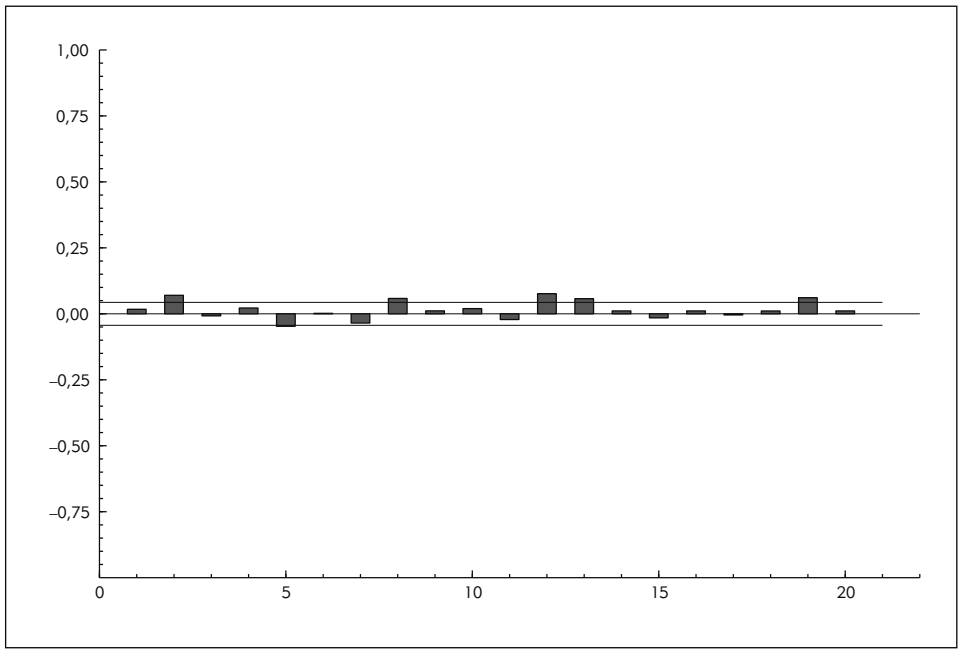


Ilustracja 1.33. USDPLN*d*: a) histogram, empiryczna funkcja gęstości, funkcja gęstości rozkładu normalnego z empiryczną średnią i wariancją, b) wykres kwantyl-kwantyl

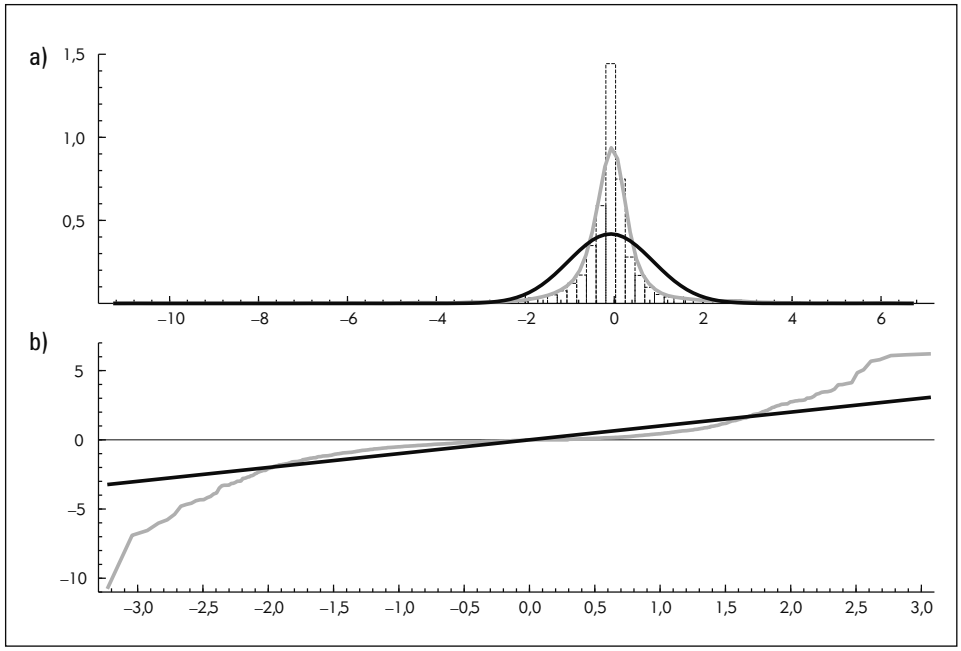


Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 1.34. WIBOR3M. Oszacowanie funkcji autokorelacji



Ilustracja 1.35. WIBOR3M: a) histogram, empiryczna funkcja gęstości, funkcja gęstości rozkładu normalnego z empiryczną średnią i wariancją, b) wykres kwantyl-kwantyl



Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

1.8. Uwagi

Biorąc pod uwagę zastosowania w modelowaniu rynków finansowych, najlepszą książką z rachunku prawdopodobieństwa w języku polskim jest podręcznik Jakubowskiego i Sztencla (2001). Jest on dość zaawansowany, gdyż jest przeznaczony głównie dla studentów kierunków matematycznych, jednak jego forma pozwala również na dość łatwe przyswojenie sobie niezbędnych zagadnień przez mniej wprawionego czytelnika.

Procesy ścisłego białego szumu i białego szumu są różnie definiowane w literaturze. Przyjęte tu określenia są zgodne ze stosowanymi przez Tsaya (2005).

Szeroki przegląd faktów empirycznych dotyczących finansowych szeregów czasowych można znaleźć w pracach Conta (2001) oraz Engle'a i Pattona (2001). Dobrym źródłem jest też monografia Tsaya (2005).

znaczenie występowania zgrupowań zmienności i grubych ogonów

Spośród prezentowanych tu faktów największe znaczenie w modelowaniu szeregów stóp zwrotu ma występowanie zgrupowań zmienności oraz grube ogony rozkładów, zwłaszcza warunkowych. Ich występowanie jest racją bytu modeli zmienności, którym poświęcona jest większość przedstawionych w tej książce rozważań.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

2

Zależności liniowe w szeregach stóp zwrotu instrumentów finansowych

Modele ekonometrii finansowej koncentrują się głównie na badaniu, analizie i modelowaniu zależności nieliniowych występujących w finansowych szeregach czasowych, przede wszystkim stóp zwrotu z instrumentów finansowych. Jednak definicja zależności nieliniowej jest bardzo ogólna i sprowadza się do stwierdzenia, że jest to zależność, która nie jest liniowa. W tym rozdziale poświęcimy więc trochę miejsca na zdefiniowanie szeregów liniowych, omówienie metod testowania zależności liniowych i opis modeli z rodziny ARMA wychwytujących te zależności. Informacje, które będą tu przedstawione, są również ważne dla zrozumienia mechanizmów opisywanych przez rozważane w kolejnych rozdziałach modele zmienności.

2.1. Testy Boxa–Pierce'a i Ljunga–Boxa

W analizie finansowych szeregów czasowych często pojawia się konieczność zbadania, czy pomiędzy elementami szeregu występują zależności liniowe, tzn. konieczność łącznego testowania, czy dla szeregu r_t autokorelacje o różnych opóźnieniach są równe zeru. Poniżej przedstawiamy dwa najczęściej stosowane w takiej sytuacji testy.

2.1.1. Test Boxa–Pierce'a (1970)

test Boxa–Pierce'a; hipoteza zerowa: współczynniki autokorelacji są równe zeru

Test ten opiera się na statystyce walizkowej (*portmanteau statistic*):

$$Q^*(m) = T\sum_{l=1}^{m}\hat{\rho}_l^2 \tag{2.1}$$

gdzie $\hat{\rho}_l$ jest współczynnikiem autokorelacji z próby, określonym wzorem (1.2).

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Hipoteza zerowa ma postać H_0: $\rho_1 = \rho_2 = ... = \rho_m = 0$, a hipotezą alternatywną jest H_a: $\rho_i \neq 0$, dla pewnego $i \in \{1, 2, ..., m\}$. Przy założeniu, że (r_t) jest szeregiem iid (oraz istnieją momenty czwartego rzędu), statystyka $Q^*(m)$ ma asymptotycznie rozkład $\chi^2(m)$.

2.1.2. Test Ljunga–Boxa (1978)

Statystyka $Q(m)$ testu Ljunga–Boxa jest modyfikacją statystyki $Q^*(m)$, mającą na celu uzyskanie większej mocy testu dla skończonych prób:

test Ljunga–Boxa; hipoteza zerowa: współczynniki autokorelacji są równe zeru

$$Q(m) = T(T+2)\sum_{l=1}^{m}\frac{\hat{\rho}_l^2}{T-l} \tag{2.2}$$

Asymptotyczny rozkład statystyki $Q(m)$ jest taki sam jak statystyki $Q^*(m)$.

W praktyce wybór maksymalnego opóźnienia m ma znaczny wpływ na wyniki testu. Zwykle przeprowadza się go dla kilku różnych wartości m. Symulacje wskazują, że stosunkowo dobre wyniki daje wybór $m \approx \ln T$.

2.2. Szeregi liniowe

W literaturze przedmiotu można spotkać różne definicje szeregu liniowego. Przyjmując podejście zaproponowane przez Tsaya (2005), o szeregu czasowym r_t mówimy, że jest liniowy, jeżeli może być przedstawiony w postaci:

liniowy szereg czasowy

$$r_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty}\psi_i\varepsilon_{t-i} \tag{2.3}$$

gdzie μ jest stałą, $\psi_0 = 1$, a (ε_t) jest ścisłym białym szumem z zerową średnią. Struktura dynamiczna liniowego szeregu r_t jest wyznaczona przez współczynniki (wagi) ψ_i.

Ze względu na charakter tej książki nie wnikamy w kwestie dotyczące nieskończonych sum niezależnych zmiennych losowych. Czytelników zainteresowanych tymi zagadnieniami odsyłamy do książki Jakubowskiego i Sztencla (2001) lub do bardziej matematycznie zaawansowanych pozycji poświęconych analizie szeregów czasowych (Brockwell i Davis 1991, Hamilton 1994, Shumway i Stoffer 2006).

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Jeśli szereg liniowy r_t, określony przez (2.3), jest kowariancyjnie stacjonarny, to:

$$E(r_t) = \mu \tag{2.4a}$$

oraz

$$\text{var}(r_t) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 \tag{2.4b}$$

gdzie σ_ε^2 jest wariancją zmiennej ε_t.

Autokowariancja z opóźnieniem l jest w tej sytuacji równa:

$$\gamma_l = \text{cov}(r_t, r_{t-l}) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+l} \tag{2.5}$$

Współczynniki ψ_i związane są zatem ze współczynnikami autokorelacji szeregu r_t w następujący sposób:

$$\rho_l = \frac{\gamma_l}{\gamma_0} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{i+l}}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^2} \tag{2.6}$$

gdzie $l \geq 0$.

2.3. Modele autoregresji

Jak można było zauważyć na ilustracji 1.4, dzienne stopy zwrotu r_t indeksu WIG wykazują statystycznie istotną wartość autokorelacji z opóźnieniem 1, co można interpretować jako dowód na istnienie zależności liniowej pomiędzy zwrotami r_{t-1} i r_t. Powinniśmy zatem podjąć próbę wykorzystania tej informacji w modelowaniu zwrotu r_t. Prosty model wykorzystujący zależność tego typu jest określony równaniem:

$$r_t = a_0 + a_1 r_{t-1} + \varepsilon_t \tag{2.7}$$

gdzie ε_t jest ścisłym białym szumem z zerową średnią i wariancją σ_ε^2.

Jest to model autoregresji rzędu 1, czyli inaczej model AR(1).

model AR(1)

Zauważmy, że mamy zależności:

$$E(r_t \mid r_{t-1}) = a_0 + a_1 r_{t-1} \tag{2.8a}$$

$$\text{var}(r_t \mid r_{t-1}) = \text{var}(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 \tag{2.8b}$$

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

warunkowa wartość oczekiwana r_t

które oznaczają, że warunkową wartością oczekiwaną zmiennej r_t, pod warunkiem że znamy r_{t-1}, jest $a_0 + a_1 r_{t-1}$, ponieważ odpowiednia warunkowa wartość oczekiwana zmiennej ε_t jest równa jej wartości oczekiwanej, czyli wynosi zero, gdyż informacja o procesie r_t nie ma wpływu na oczekiwania dotyczące ε_t. Z tych samych powodów, warunkowa wariancja zmiennej r_t, pod warunkiem, że znamy r_{t-1}, jest równa wariancji ścisłego białego szumu ε_t.

Naturalnym uogólnieniem modelu AR(1) jest model AR(p) określony równaniem:

model AR(p)

$$r_t = a_0 + a_1 r_{t-1} + \ldots + a_p r_{t-p} + \varepsilon_t \tag{2.9}$$

2.3.1. Własności modeli AR(p)

Przedyskutujemy teraz dokładnie własności modeli AR(1) i AR(2), co powinno rozwinąć intuicję pozwalającą na lepsze zrozumienie zależności opisywanych przez ogólne modele AR(p). W obu szczegółowo rozważanych przypadkach określimy warunki stacjonarności procesu i opiszemy dynamikę autokorelacji.

2.3.1.1. Kowariancyjna stacjonarność modelu AR(1)

Przyjmijmy, że szereg r_t jest kowariancyjnie stacjonarny. Wtedy z równania (2.7) otrzymujemy:

$$E(r_t) = a_0 + a_1 E(r_{t-1})$$

Wobec kowariancyjnej stacjonarności:

$$E(r_t) = E(r_{t-1}) = \mu$$

a zatem:

$$E(r_t) = \mu = \frac{a_0}{1 - a_1} \tag{2.10}$$

Wynika stąd, że wartość oczekiwana zmiennej r_t istnieje pod warunkiem, że $a_1 \neq 1$ oraz, że r_t ma średnią zero tylko wtedy, gdy $a_0 = 0$.

Korzystając z zależności $a_0 = (1 - a_1)\mu$, można zapisać model AR(1) w postaci:

$$r_t - \mu = a_1(r_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t \tag{2.11}$$

stosując kolejne podstawienia, dostajemy:

$$r_t - \mu = \varepsilon_t + a_1\varepsilon_{t-1} + a_1^2\varepsilon_{t-2} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} a_1^i \varepsilon_{t-i} \tag{2.12}$$

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Zatem $r_t - \mu$ jest liniową funkcją zmiennych ε_{t-i} dla $i \geq 0$. Korzystając z tej własności i z niezależności zmiennych ε_t, otrzymujemy równość $E[(r_t - \mu)\varepsilon_{t+1}] = 0$ i, wobec stacjonarności, $\text{cov}(r_{t-1}, \varepsilon_t) = E[(r_t - \mu)\varepsilon_t] = 0$. Stąd, podnosząc obustronnie do kwadratu i biorąc wartość oczekiwaną w (2.11), otrzymujemy:

$$\text{var}(r_t) = a_1^2 \,\text{var}(r_{t-1}) + \sigma_\varepsilon^2$$

z czego wynika, iż:

$$\text{var}(r_t) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - a_1^2}$$

pod warunkiem, że $a_1^2 < 1$.

Zatem kowariancyjna stacjonarność modelu AR(1) implikuje, że $-1 < a_1 < 1$. Jest także odwrotnie. Jeśli $-1 < a_1 < 1$, to – posługując się reprezentacją (2.12) – można wykazać, że szereg r_t jest kowariancyjnie stacjonarny.

Kowariancyjna stacjonarność modelu AR(1) określonego równaniem (2.7) jest zatem równoważna warunkowi $-1 < a_1 < 1$.

2.3.1.2. ACF dla modelu AR(1)

Mnożąc równość (2.11) przez ε_t, biorąc obustronnie wartości oczekiwane i korzystając z tego, że $E[(r_{t-1} - \mu)\varepsilon_t] = 0$, otrzymujemy $E[\varepsilon_t(r_t - \mu)] = \sigma_\varepsilon^2$. Pozwala to wyprowadzić zależność:

$$\gamma_l = \begin{cases} a_1\gamma_1 + \sigma_\varepsilon^2 & \text{dla} \quad l = 0 \\ a_1\gamma_{l-1} & \text{dla} \quad l > 0 \end{cases} \tag{2.13}$$

z której wynika, że dla kowariancyjnie stacjonarnego modelu AR(1) określonego przez (2.7), ACF spełnia zależność:

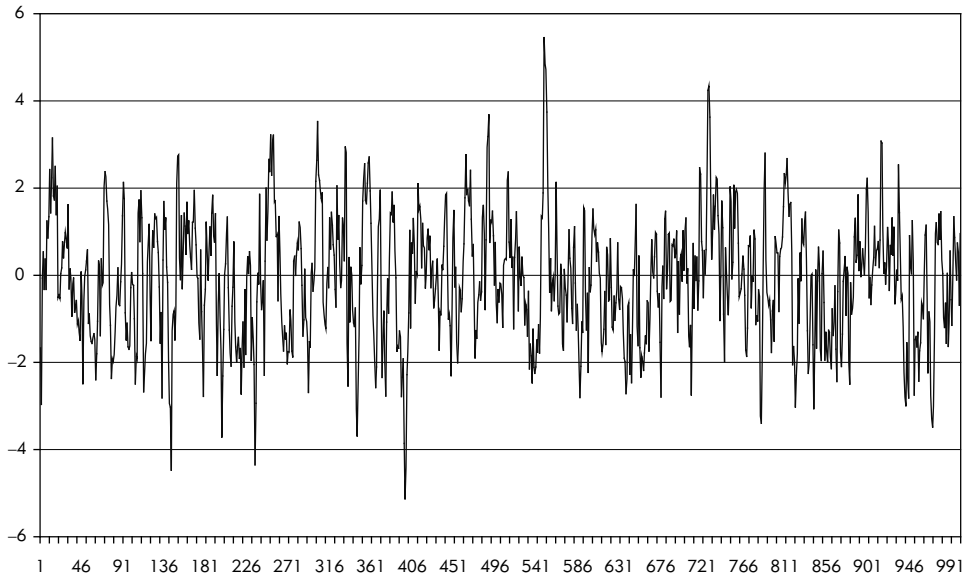
$$\rho_l = a_1\rho_{l-1}, \qquad \text{dla } l > 0$$

Ponieważ $\rho_0 = 1$, więc $\rho_l = a_1^1$, dla $l \geq 0$.

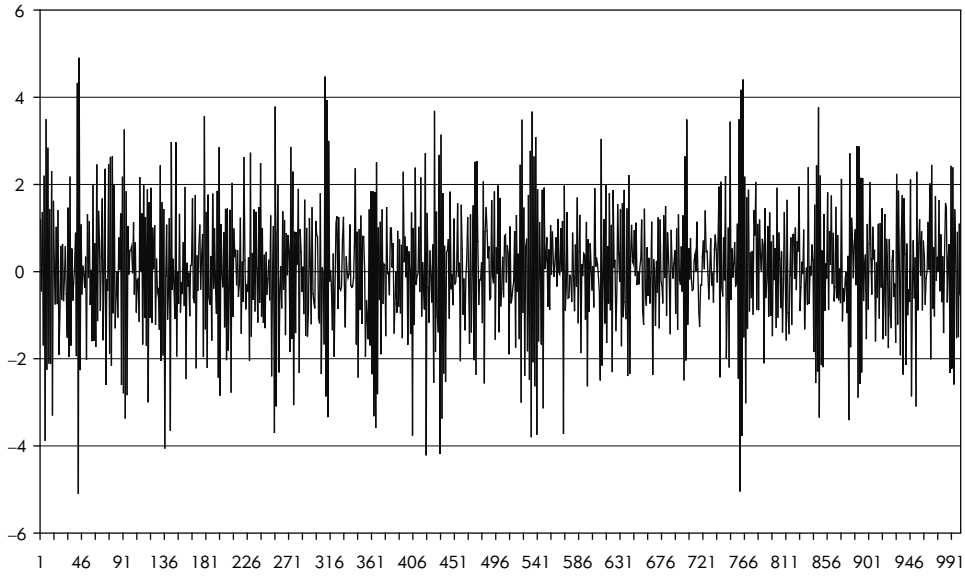
W celu pogłębienia u czytelnika pewnej intuicji dotyczącej zachowań omawianych procesów przedstawiamy na ilustracjach 2.1 i 2.2 symulowane trajektorie procesów AR(1) z dodatnim i ujemnym współczynnikiem przy opóźnionej zmiennej oraz oszacowane na ich podstawie funkcje ACF (ilustracje 2.3. i 2.4). Analizując wykresy, trzeba mieć świadomość, że na uzyskane symulacje znaczny wpływ ma jakość używanego generatora liczb losowych.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 2.1. Przykładowa trajektoria procesu AR(1) z $a_1 = 0{,}7$, $\varepsilon_t \sim N(0,1)$

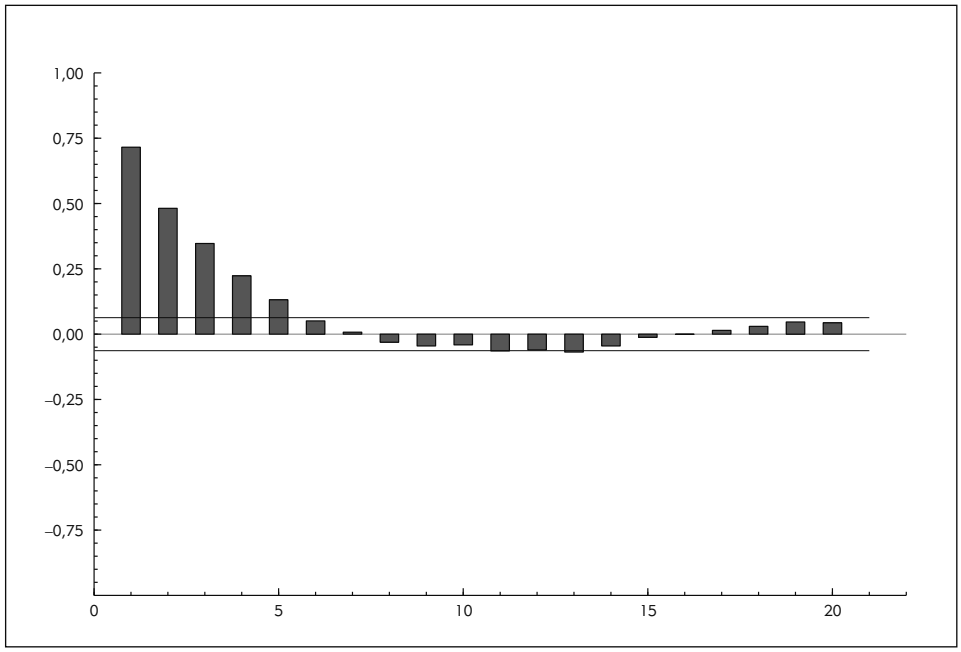


Ilustracja 2.2. Przykładowa trajektoria procesu AR(1) z $a_1 = -0{,}7$, $\varepsilon_t \sim N(0,1)$

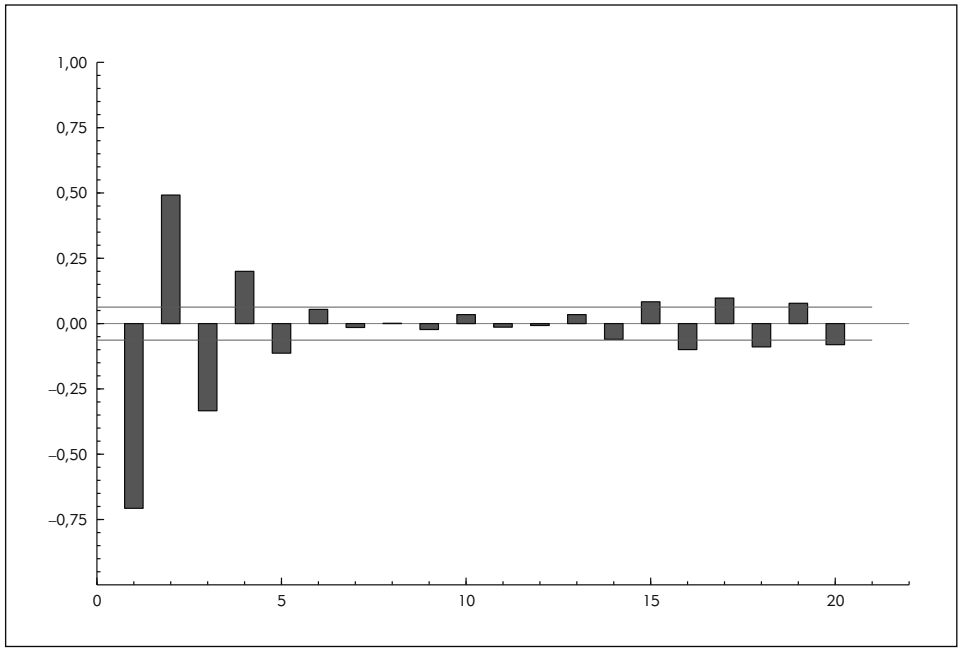


Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 2.3. Oszacowanie ACF dla trajektorii z ilustracji 2.1



Ilustracja 2.4. Oszacowanie ACF dla trajektorii z ilustracji 2.2



Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

2.3.1.3. Kowariancyjna stacjonarność modelu AR(2)

Model AR(2) ma postać:

$$r_t = a_0 + a_1 r_{t-1} + a_2 r_{t-2} + \varepsilon_t \tag{2.14}$$

Zakładając kowariancyjną stacjonarność, możemy – podobnie jak w przypadku AR(1) – wyliczyć:

$$E(r_t) = \mu = \frac{a_0}{1 - a_1 - a_2} \tag{2.15}$$

pod warunkiem, że $a_1 + a_2 \neq 1$.

Wykorzystując to, że $a_0 = (1 - a_1 - a_2)\mu$, możemy dalej napisać:

$$r_t - \mu = a_1(r_{t-1} - \mu) + a_2(r_{t-2} - \mu) + \varepsilon_t \tag{2.16}$$

Mnożąc to równanie przez $(r_{t-1} - \mu)$ dla $l > 0$ i wyliczając wartość oczekiwaną, dostajemy zależność:

$$\gamma_l = a_1\gamma_{l-1} + a_2\gamma_{l-2} \tag{2.17}$$

dla $l > 0$.

Jest to tzw. równanie momentów dla (kowariancyjnie) stacjonarnego modelu AR(2). Dzieląc je obustronnie przez γ_0, otrzymujemy:

$$\rho_l = a_1\rho_{l-1} + a_2\rho_{l-2} \tag{2.18}$$

dla $l > 0$.

Zatem dla AR(2):

$$\rho_0 = 1 \tag{2.19a}$$

$$\rho_1 = \frac{a_1}{1 - a_2} \tag{2.19b}$$

$$\rho_l = a_1\rho_{l-1} + a_2\rho_{l-2} \tag{2.19c}$$

dla $l \geq 2$.

Stąd wynika, że dla kowariancyjnie stacjonarnego procesu AR(2) spełnione jest równanie:

$$(1 - a_1 L - a_2 L^2)\rho_l = 0 \tag{2.20}$$

gdzie L oznacza operator opóźnienia (*lag operator*) lub inaczej operator przesunięcia wstecz (*back-shift operator*), określony wzorem $Lr_t = r_{t-1}$.

Wielomian $a(L) = 1 - a_1 L - a_2 L^2$ występujący po prawej stronie równania (2.20) odgrywa kluczową rolę w badaniu kowariancyjnej stacjonarności szeregu r_t określonego przez model AR(2) (2.14). Jeśli wszystkie pierwiastki wielomianu

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

$a(L)$ mają moduły większe od 1, to proces r_t jest kowariancyjnie stacjonarny. Nie wchodząc w szczegóły przedstawione np. w książce Hamiltona (1994), wspomnijmy jedynie, że gdy spełniony jest powyższy warunek, to szereg r_t ma reprezentację (2.3), gdzie szereg potęgowy:

$$\psi(L) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i L^i$$

określony jest przez równość:

$$a(L)\psi(L) = 1$$

przy czym $\sum_{i=1}^{\infty} |\psi_i| < \infty$. Gwarantuje to kowariancyjną stacjonarność szeregu r_t, a jego średnia, wariancja i kowariancja wyrażają się również za pomocą wzorów (2.4a), (2.4b) i (2.5).

Na zakończenie tych rozważań przedstawiamy na ilustracjach 2.5 i 2.6 wykresy symulowanej trajektorii procesu AR(2) oraz oszacowanej na jej podstawie funkcji autokorelacji.

kowariancyjna stacjonarność modeli AR(*p*)

Wyniki dotyczące rozważanych modeli AR(1) i AR(2) uogólniają się w naturalny sposób na przypadek modelu AR(p) określonego równaniem (2.9). W tym wypadku szereg r_t jest kowariancyjnie stacjonarny, jeśli wszystkie pierwiastki wielomianu

$$a(L) = 1 - a_1 L - \ldots - a_p L^p \tag{2.21}$$

mają moduły większe od 1. Jeśli tak jest, to:

$$E(r_t) = \mu = \frac{a_0}{1 - a_1 - \ldots - a_p} \tag{2.22}$$

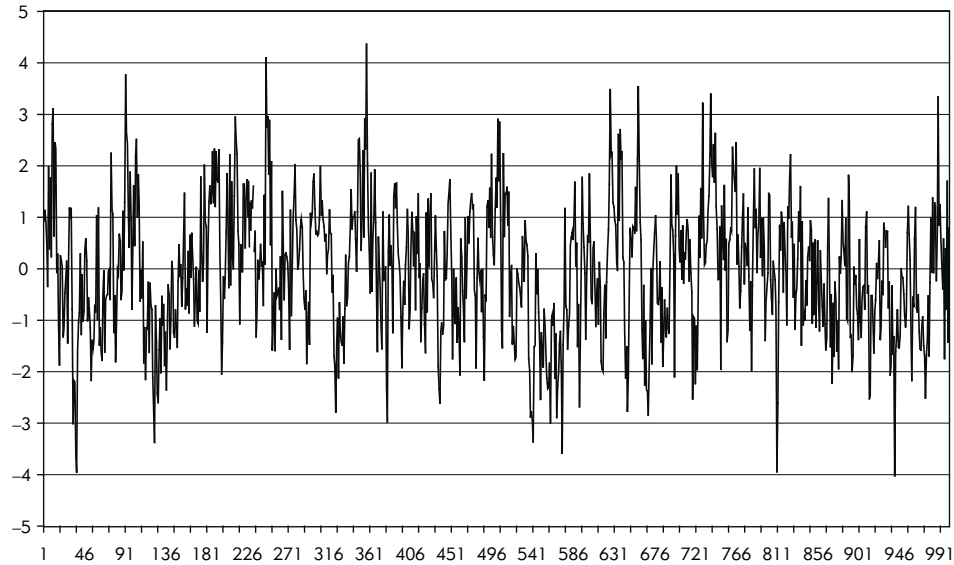
a funkcja autokorelacji spełnia równanie:

$$(1 - a_1 L - \ldots - a_p L^p)\rho_l = 0 \tag{2.23}$$

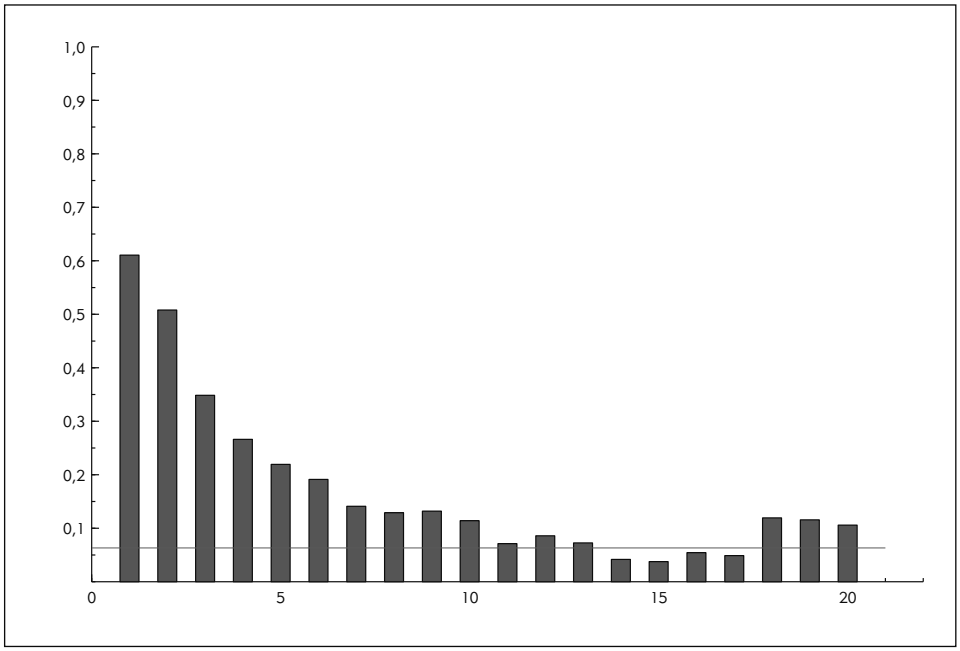
Z warunku (2.23) wynika, że dla kowariancyjnie stacjonarnego szeregu typu AR(p), $\rho_l \to 0$, przy $l \to \infty$.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 2.5. Przykładowa trajektoria procesu AR(2) z $a_1 = 0{,}5$ oraz $a_2 = 0{,}2$, $\varepsilon_t \sim \mathrm{N}(0,1)$



Ilustracja 2.6. Oszacowanie ACF dla trajektorii z ilustracji 2.5



Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

2.3.2. Identyfikowanie modeli AR w praktyce – PACF i kryteria informacyjne

W praktyce rząd p modelu AR(p) jest nieznany i trzeba go wyznaczyć empirycznie. Można to osiągnąć stosując funkcję autokorelacji cząstkowej lub kryteria informacyjne.

funkcja autokorelacji cząstkowej PACF

PACF, czyli funkcję autokorelacji cząstkowej (*partial autocorrelation function*) stacjonarnego szeregu r_t definiuje się za pomocą współczynników autokorelacji ρ_l w następujący sposób:

$$a_{1,1} = \rho_1$$

$$a_{2,2} = (\rho_2 - \rho_1^2)/(1 - \rho_1^2)$$

$$a_{s,s} = \frac{\rho_s - \sum_{j=1}^{s-1} a_{s-1,j}\rho_{s-j}}{1 - \sum_{j=1}^{s-1} a_{s-1,j}\rho_j}$$

$s = 3, 4, 5, \ldots,$ gdzie $a_{s,j} = a_{s-1,j} - a_{s,s}a_{s-1,s-j}$ dla $j = 1, 2, 3, \ldots, s-1$

Oszacowania $\hat{a}_{j,j}$ współczynników autokorelacji cząstkowej z próby można otrzymać rozważając modele AR kolejnych rzędów:

$r_t = a_{0,1} + a_{1,1}r_{t-1} + e_{1,t}$
$r_t = a_{0,2} + a_{1,2}r_{t-1} + a_{2,2}r_{t-2} + e_{2,t}$
$r_t = a_{0,3} + a_{1,3}r_{t-1} + a_{2,3}r_{t-2} + a_{3,3}r_{t-3} + e_{3,t}$
itd.

Równania te mogą być estymowane za pomocą metody najmniejszych kwadratów. Oszacowanie parametru $\hat{a}_{1,1}$ w pierwszym równaniu jest nazywane wartością PACF z próby z opóźnieniem 1, $\hat{a}_{2,2}$ w drugim równaniu – wartością PACF z próby z opóźnieniem 2 itd.

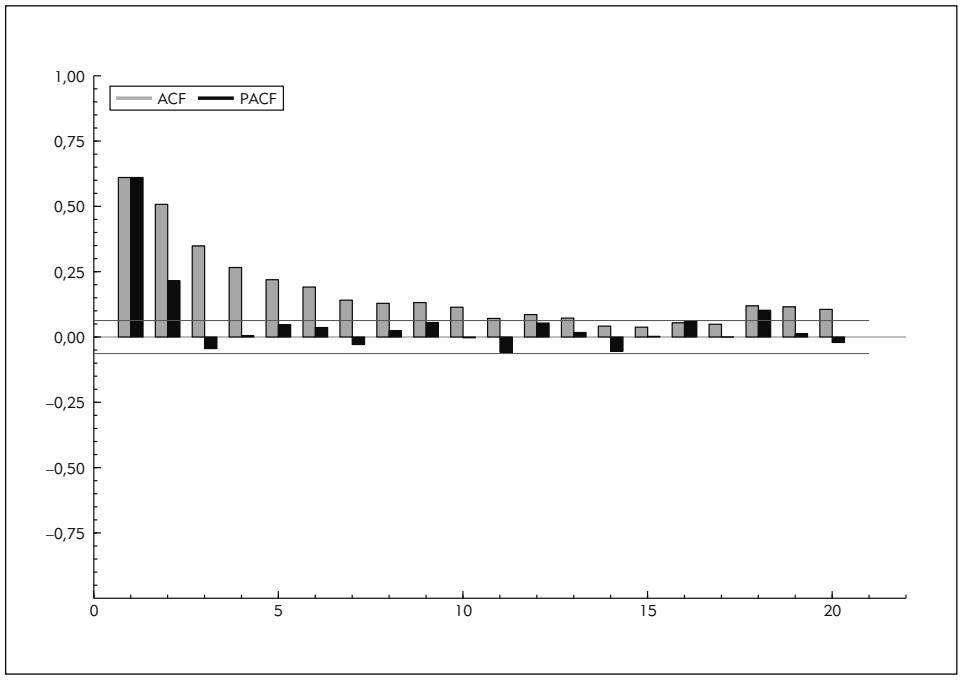
Wynika stąd, że PACF z opóźnieniem 2 wskazuje dodatkowy wkład wartości r_{t-2} do r_t ponad to, co już zostało wniesione za pośrednictwem r_{t-1} w modelu AR(1): $r_t = a_0 + a_1 r_{t-1} + e_{1,t}$. PACF z opóźnieniem 3 pokazuje dodatkowy wkład wartości r_{t-3} do r_t ponad to, co zostało wniesione przez model AR(2) itd. Zatem dla modelu AR(p), PACF z próby z opóźnieniem p nie powinno się zerować, natomiast z opóźnieniami większymi od p powinno być bliskie 0 (ilustracja 2.7).

Można wykazać, że dla stacjonarnego gaussowskiego modelu AR(p), PACF z próby ma następujące własności:

- $\hat{a}_{p,p}$ jest zbieżne do a_p, gdy długość próby T dąży do ∞,
- $\hat{a}_{j,j}$ dąży do 0, dla wszystkich $j > p$,
- asymptotyczna wariancja zmiennych $\hat{a}_{j,j}$ jest równa $1/T$, dla $j > p$.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 2.7. Oszacowania ACF i PACF dla trajektorii z ilustracji 2.5



Najczęściej wyboru konkretnego modelu jako najlepiej opisującego szereg danych dokonuje się, opierając się na kryteriach informacyjnych. Zdefiniowane poniżej kryteria informacyjne wykorzystują funkcję wiarygodności, którą oznaczamy tu przez L. Dla przypomnienia: jeśli dana jest próba $\{r_1, \ldots, r_T\}$, to:

$$L(\boldsymbol{\theta}) = f(r_1, \ldots, r_T; \boldsymbol{\theta}) \tag{2.24}$$

gdzie f jest gęstością łącznego rozkładu zmiennych $\{r_1, \ldots, r_T\}$, a $\boldsymbol{\theta}$ jest wektorem parametrów określającym jednoznacznie ten rozkład.

Przy estymacji parametrów modeli szeregów czasowych metodą największej wiarygodności na ogół korzysta się z równości:

$$f(r_1, \ldots r_T; \boldsymbol{\theta}) = f_1(r_1; \boldsymbol{\theta}) \prod_{t=2}^{T} f_t(r_t \mid r_{t-1}, \ldots, r_1; \boldsymbol{\theta}) \tag{2.25}$$

W wypadku modelu AR(p) (2.9),

$$f_t(r_t \mid r_{t-1}, \ldots, r_1; \boldsymbol{\theta}) = g(r_t - E(r_t \mid r_{t-1}, \ldots, r_1); \boldsymbol{\theta})$$

gdzie g jest funkcją gęstości zmiennej ε_t.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

kryterium informacyjne Akaike

Najbardziej popularne jest kryterium informacyjne Akaike (*Akaike Information Criterion* – AIC):

$$\text{AIC} = -2\frac{\ln L(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{T} + 2\frac{k}{T}$$

gdzie k jest liczbą parametrów modelu, a $L(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ jest wartością funkcji wiarygodności dla obserwacji $\{r_1, \ldots, r_T\}$, wyliczoną dla oszacowania $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ wektora parametrów, które ją maksymalizuje.

Stosowanie kryterium informacyjnego AIC do wyboru rzędu modelu AR polega na wyznaczaniu jego wartości dla modeli AR(l), $l = 0, 1, \ldots, P$, i wybraniu takiego rzędu l, dla którego AIC ma najmniejszą wartość.

pozostałe kryteria informacyjne

Oprócz kryterium AIC do najczęściej stosowanych należą jeszcze skorygowane kryterium Akaike (AICc) oraz kryteria Schwarza (*Bayesian Information Criterion* – BIC), Hannana–Quinna (H–Q) i Shibaty (Sh), określone wzorami:

$$\text{AICc} = -2\frac{\ln L(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{T} + 2\frac{T+k}{T-k+2}$$

$$\text{BIC} = -2\frac{\ln L(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{T} + \frac{k\ln T}{T}$$

$$\text{H–Q} = -2\frac{\ln L(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{T} + 2\frac{k\ln(\ln T)}{T}$$

$$\text{Sh} = -2\frac{\ln L(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{T} + \ln\left(\frac{T+2k}{T}\right)$$

Przedstawione kryteria informacyjne różnią się regułą, według której wyliczają „karę” za liczbę parametrów modelu. Na przykład z tego, że dla $T \geq 8$, $\ln T > 2$, wynika, iż kryterium BIC „karze” bardziej za liczbę parametrów modelu niż kryterium AIC (jeśli $T \geq 8$).

Należy podkreślić, że chociaż podane tu definicje kryteriów informacyjnych należą do najczęściej spotykanych w literaturze ekonometrycznej, to jednak czasami kryteria informacyjne definiowane są inaczej. Na przykład Davidson (2008) używa następujących definicji:

$$\text{AIC} = \ln L(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - k$$

$$\text{BIC} = \ln L(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - \tfrac{1}{2}k\ln T$$

$$\text{H–Q} = \ln L(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - k\ln(\ln T)$$

W takiej sytuacji, przeciwnie niż poprzednio, większa wartość kryterium oznacza, że model jest lepszy.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

2.3.3. Estymacja parametrów modeli AR(*p*)

Do estymowania modelu AR(*p*) określonego równaniem (2.9) zwykle stosowana jest metoda najmniejszych kwadratów (MNK), rozpoczynająca się od obserwacji z indeksem $p+1$. Dokładniej, przy danych p pierwszych obserwacjach mamy zależność:

$$r_t = a_0 + a_1 r_{t-1} + \ldots + a_p r_{t-p} + \varepsilon_t$$
$$t = p+1, \ldots, T$$

która może być estymowana za pomocą MNK. Oszacowany model ma postać:

$$\hat{r}_t = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 r_{t-1} + \ldots + \hat{a}_p r_{t-p}$$

a resztami są $\hat{\varepsilon}_t = r_t - \hat{r}_t$. Oszacowaniem wariancji zmiennych ε_t jest:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\sum_{t=p+1}^{T} \hat{\varepsilon}_t^2}{T - 2p - 1} \tag{2.26}$$

W praktyce estymację parametrów przeprowadza się numerycznie, wykorzystując odpowiednie programy komputerowe. Oprócz oszacowania $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ parametru $\boldsymbol{\theta}$ podają one również jego błąd standardowy $s_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}$. Statystyka $t = \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0}{s_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}}$ służy do testowania hipotezy H_0: $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$, przeciwko alternatywie H_1: $\boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}_0$. Przy prawdziwej hipotezie zerowej ma ona rozkład t Studenta z $N-k$ stopniami swobody, $t(N-k)$, gdzie N jest długością ciągu obserwacji wykorzystywanych do estymacji, a k – liczbą estymowanych parametrów. Podawana przez program komputerowy p-wartość jest równa prawdopodobieństwu $P(|X| \geq |t|)$, gdzie $X \sim t(N-k)$. Jeśli $\boldsymbol{\theta}_0 = 0$, to mówi się, że oszacowanie parametru jest istotne na poziomie α, jeśli p-wartość jest mniejsza od α.

hipoteza zerowa:
H_0: $\theta = \theta_0$

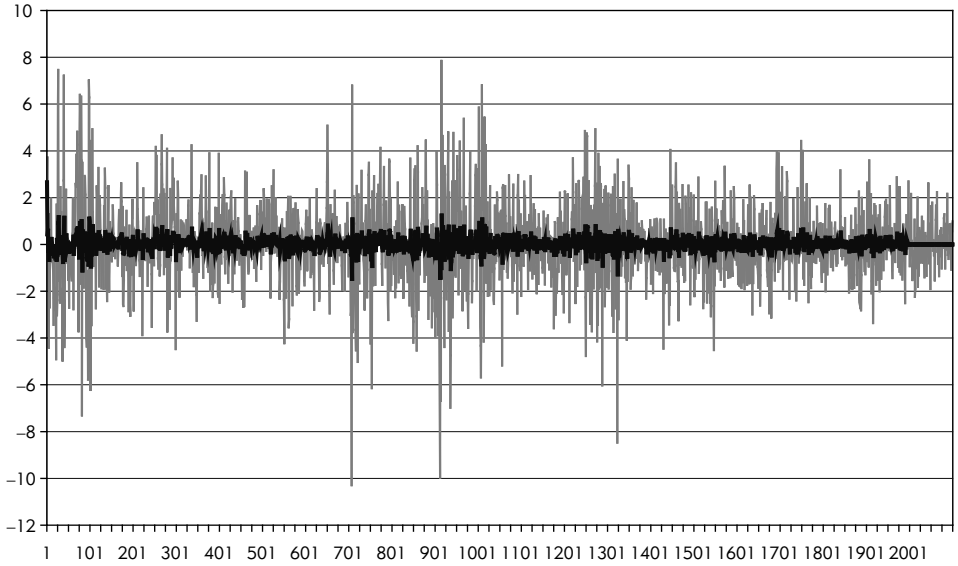
Model jest dobrze dopasowany, jeśli oszacowania wszystkich jego parametrów są statystycznie istotne na możliwie niskim poziomie istotności α. Zazwyczaj przyjmuje się $\alpha = 0{,}01$ lub $\alpha = 0{,}05$.

2.3.4. Ocena dopasowania modelu

Na ilustracji 2.8 przedstawiono wykresy stóp zwrotu z indeksu WIG oraz oszacowania ich średniej warunkowej otrzymane za pomocą modelu AR(1). Łatwo zauważyć, że model słabo wyjaśnia rzeczywistą dynamikę szeregu. Jak się później przekonamy, jest to związane z tym, że w szeregach finansowych stóp zwrotu dominującą rolę odgrywają zależności nieliniowe.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 2.8. Zwroty z indeksu WIG (linia szara). Model AR(1), oszacowania średniej warunkowej (linia czarna). Okres 2.01.1995–31.12.2002



Jeśli model AR(p) dobrze opisuje dynamikę badanego szeregu, to ciąg reszt powinien być realizacją ścisłego białego szumu. Należy to sprawdzić za pomocą odpowiednich testów. Zwracamy uwagę, że omawiane przez nas dotychczas testy dotyczą jedynie zależności liniowych w testowanych szeregach. Ponieważ w definicji modelu AR(p) jest mowa o ścisłym białym szumie, więc powinno się stosować testy wykrywające także zależności nieliniowe. Przykłady takich testów pojawią się w kolejnych rozdziałach.

2.3.5. Prognozowanie

Załóżmy, że mamy dopasowany model AR(p) i chcemy w chwili h prognozować wartość zmiennej r_{h+l}, gdzie $l \geq 1$ (l – horyzont prognozy). Oznaczmy przez $\hat{r}_h(l)$ prognozę zmiennej r_{h+l}, odpowiadającą stosowaniu błędu średniokwadratowego jako funkcji straty. Oznacza to, że prognoza $\hat{r}_h(l)$ jest zmienną losową wybraną tak, by:

$$E[r_{h+l} - \hat{r}_h(l)]^2 \leq \min_g E[r_{h+l} - g(r_h, \ldots, r_1)]^2$$

gdzie $g(r_h, \ldots, r_1)$ jest dowolną funkcją mierzalną względem σ-ciała $\mathcal{F}_h$ generowanego przez informacje na temat procesu r_t do momentu h włącznie.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Zmienną $\hat{r}_h(l)$ (lub jej realizację) nazywamy prognozą l kroków naprzód zmiennej r_t, rozpoczynającą się w momencie h. Można wykazać, że $\hat{r}_h(l) = E(r_{h+l} \mid \mathcal{F}_h)$.

2.3.5.1. Prognoza 1 krok naprzód

Z modelu AR(p) mamy:

$$r_{h+1} = a_0 + a_1 r_h + \ldots + a_p r_{h+1-\mathrm{p}} + \varepsilon_{h+1}$$

Jeśli przyjmiemy, że funkcją straty jest błąd średniokwadratowy, to prognoza punktowa zmiennej r_{h+1} przy danym modelu i obserwacjach do momentu h włącznie jest warunkową wartością oczekiwaną:

$$\hat{r}_h(1) = E(r_{h+1} \mid \mathcal{F}_h) = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i r_{h+1-i} \tag{2.27}$$

Błąd prognozy ma postać:

$$e_h(1) = r_{h+1} - \hat{r}_h(1) = \varepsilon_{h+1} \tag{2.28}$$

Wariancja błędu prognozy jest równa $\mathrm{var}(e_h(1)) = \mathrm{var}(\varepsilon_{h+1}) = \sigma_\varepsilon^2$. Jeśli zmienne ε_t mają rozkład normalny, to 95-procentową prognozą przedziałową jeden krok naprzód zmiennej r_{h+1} jest przedział o końcach $\hat{r}_h(1) \pm 1{,}96\sigma_\varepsilon$.

2.3.5.2. Prognoza 2 kroki naprzód

W modelu AR(p) mamy:

$$r_{h+2} = a_0 + a_1 r_{h+1} + \ldots + a_p r_{h+2-\mathrm{p}} + \varepsilon_{h+2}$$

Biorąc warunkową wartość oczekiwaną otrzymujemy:

$$\hat{r}_h(2) = E(r_{h+2} \mid \mathcal{F}_h) = a_0 + a_1 \hat{r}_h(1) + a_2 r_h + \ldots + a_p r_{h+2-p} \tag{2.29}$$

$$e_h(2) = r_{h+2} - \hat{r}_h(2) = a_1(r_{h+1} - \hat{r}_h(1)) + \varepsilon_{h+2} = \varepsilon_{h+2} + a_1 \varepsilon_{h+1} \tag{2.30}$$

Wariancja błędu prognozy jest równa $\mathrm{var}(e_h(2)) = (1 + a_1^2)\,\sigma_\varepsilon^2$, czyli $\mathrm{var}(e_h(2)) \geq \mathrm{var}(e_h(1))$. Oznacza to, że ze wzrostem horyzontu rośnie błąd prognozy (czego można było oczekiwać).

2.3.5.3. Prognoza kilka kroków naprzód

Ogólnie mamy:

$$r_{h+l} = a_0 + a_1 r_{h+l-1} + \ldots + a_p r_{h+l-p} + \varepsilon_{h+l}$$

Stąd prognoza l kroków naprzód ma postać:

$$\hat{r}_h(l) = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i \hat{r}_h(l-i) \tag{2.31}$$

gdzie $\hat{r}_h(i) = r_{h+i}$, gdy $i \leq 0$.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Prognozy można więc wyznaczać rekurencyjnie. Błąd prognozy jest równy $e_h(l) = r_{h+l} - \hat{r}_h(l)$. Można wykazać, że dla stacjonarnych modeli AR(p), $\hat{r}_h(l)$ jest zbieżne do $E(r_t)$ przy $l \to \infty$ (własność powrotu do średniej). W tej sytuacji wartość błędu prognozy jest zbieżna do var(r_t).

2.4. Modele średniej ruchomej

model AR(∞)

Jeżeli zależności liniowe wiążą ze sobą nawet zmienne bardzo odległe w czasie, to w modelu AR(p) konieczne jest rozważanie bardzo dużej liczby opóźnień. Granicznym przypadkiem jest model AR(∞):

$$r_t = a_0 + a_1 r_{t-1} + a_2 r_{t-2} + \ldots + \varepsilon_t$$

Jest to model nierealistyczny, gdyż ma nieskończenie wiele parametrów. Można jednak założyć, że parametry te są wartościami pewnych funkcji skończonej liczby zmiennych. Przyjmijmy na przykład, że:

$$r_t = a_0 - b_1 r_{t-1} - b_1^2 r_{t-2} - b_1^3 r_{t-3} - \ldots + \varepsilon_t \tag{2.32}$$

Zapiszmy (2.32) w postaci:

$$r_t + b_1 r_{t-1} + b_1^2 r_{t-2} + b_1^3 r_{t-3} + \ldots = a_0 + \varepsilon_t \tag{2.33}$$

Wówczas dla r_{t-1} mamy:

$$r_{t-1} + b_1 r_{t-2} + b_1^2 r_{t-3} + b_1^3 r_{t-4} + \ldots = a_0 + \varepsilon_{t-1} \tag{2.34}$$

Stąd, mnożąc (2.34) przez b_1 i odejmując od (2.32), możemy otrzymać równanie:

$$r_t = a_0 (1 - b_1) + \varepsilon_t - b_1 \varepsilon_{t-1} \tag{2.35}$$

model MA(1)

w którym, z dokładnością do stałej, r_t jest pewną średnią zaburzeń (szoków) ε_t i ε_{t-1}. Jest to przykład modelu średniej ruchomej MA(1) (*moving average*), którego ogólna postać jest następująca:

$$r_t = c_0 + \varepsilon_t - b_1 \varepsilon_{t-1} \tag{2.36}$$

gdzie c_0 jest stałą, a ε_t jest ścisłym białym szumem z zerową średnią.

Ogólnie, model MA(q) jest postaci:

$$r_t = c_0 + \varepsilon_t - b_1 \varepsilon_{t-1} - \ldots - b_q \varepsilon_{t-q} \tag{2.37}$$

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

2.4.1. Własności modeli MA

Procesy opisywane przez modele MA są kowariancyjnie stacjonarne, ponieważ są skończonymi kombinacjami liniowymi zmiennych tworzących ścisły biały szum. W wypadku modelu (2.36) prawdziwe są równości:

$$E(r_t) = c_0 \tag{2.38a}$$

$$\text{var}(r_t) = (1 + b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_q^2)\,\sigma_\varepsilon^2 \tag{2.38b}$$

a funkcja autokorelacji ma następującą postać:

dla MA(1):

$$\rho_0 = 1$$

$$\rho_1 = \frac{-b_1}{1 + b_1^2}$$

$$\rho_l = 0, \text{ dla } l > 1$$

dla MA(2):

$$\rho_0 = 1$$

$$\rho_1 = \frac{-b_1 + b_1 b_2}{1 + b_1^2 + b_2^2}$$

$$\rho_2 = \frac{-b_2}{1 + b_1^2 + b_2^2}$$

$$\rho_l = 0, \text{ dla } l > 2$$

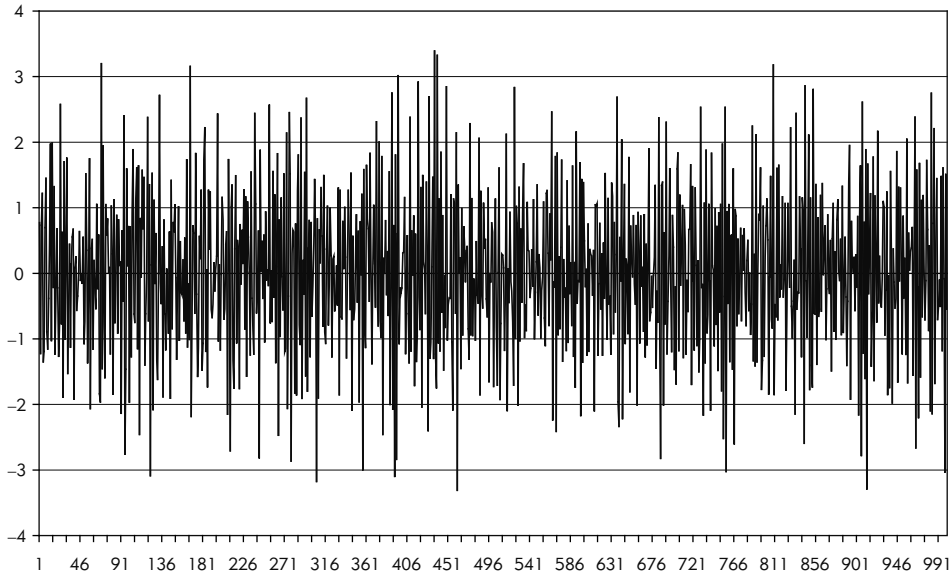
model MA(*q*)

Ogólnie, dla modelu MA(q), wartość ACF z opóźnieniem q jest różna od zera, a dla każdego opóźnienia $l > q$ jest równa zero (ilustracja 2.10). Tę własność można wykorzystać do identyfikacji rzędu modelu MA.

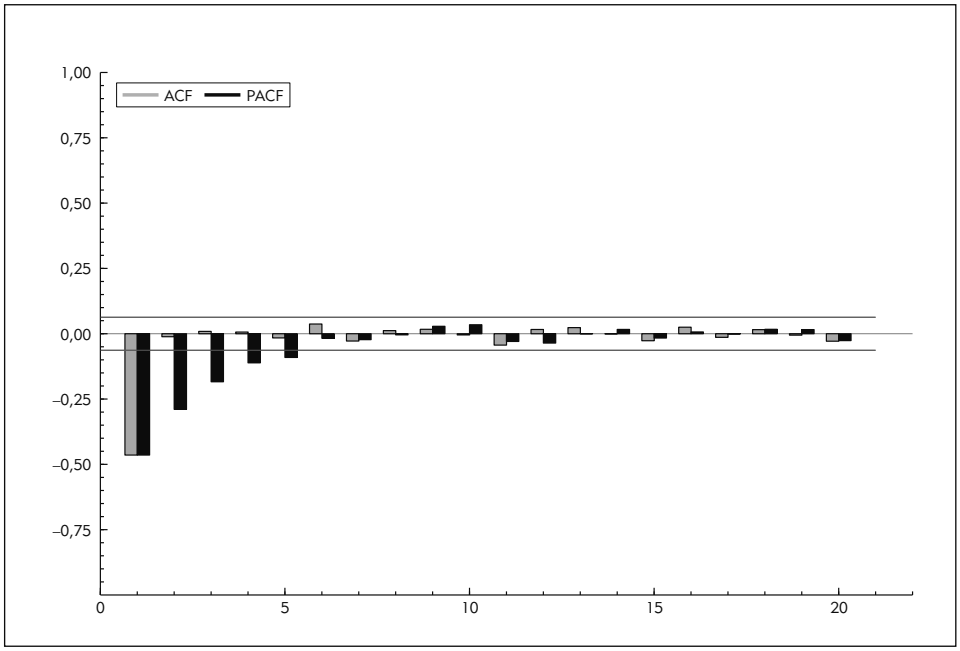
Przykładową trajektorię procesu MA(1) przedstawiono na ilustracji 2.9.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 2.9. Przykładowa trajektoria procesu MA(1) z $b_1 = 0{,}7$ oraz $\varepsilon_t \sim N(0,1)$



Ilustracja 2.10. Oszacowania ACF i PACF dla trajektorii z ilustracji 2.9



Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

2.4.2. Estymacja modeli MA

Modele MA zwykle estymuje się za pomocą metody największej wiarygodności. Możliwe są przy tym dwa podejścia.

metoda wiarygodności warunkowej

Przy pierwszym podejściu przyjmuje się, że początkowe zaburzenia (tj. ε_t dla $t \le 0$) są równe zero, a zaburzenia potrzebne do wyliczenia wartości funkcji wiarygodności są otrzymywane rekurencyjnie: $\varepsilon_1 = r_1 - c_0$, $\varepsilon_2 = r_2 - c_0 + b_1\varepsilon_1$. Takie podejście jest nazywane metodą wiarygodności warunkowej.

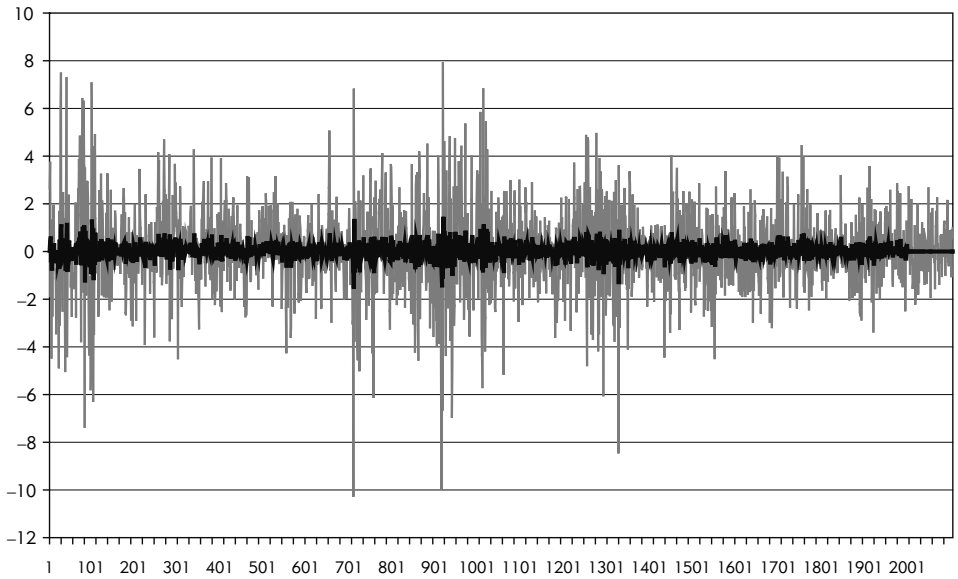
W drugim podejściu traktuje się początkowe zaburzenia ε_t dla $t \le 0$ jako dodatkowe parametry i estymuje się je łącznie z innymi parametrami modelu.

metoda wiarygodności dokładnej

To podejście nazywa się metodą wiarygodności dokładnej. Oszacowania otrzymane metodą wiarygodności dokładnej uważa się za bardziej poprawne, ale wymagają one dłuższych obliczeń. Jeśli długość próby jest duża, to oszacowania otrzymane za pomocą obu typów metody największej wiarygodności nie różnią się bardzo od siebie.

Ilustracja 2.11 pozwala na porównanie stóp zwrotu z indeksu WIG z ich średnią warunkową oszacowaną za pomocą modelu MA(1). Podobnie jak na ilustracji 2.8 widzimy, że model opisuje tylko niewielką część dynamiki szeregu.

Ilustracja 2.11. Zwroty z indeksu WIG (linia szara). Model MA(1), oszacowania średniej warunkowej (linia czarna). Okres 2.01.1995–6.06.2003



Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

2.4.3. Prognozowanie za pomocą modeli MA

Model MA jest modelem o skończonej pamięci, a zatem uzyskiwane za jego pomocą prognozy bardzo szybko zbiegają do średniej.

W wypadku modelu MA(1) wzory opisujące prognozy i ich błędy są następujące:

- prognoza 1 krok naprzód:

$$\hat{r}_h(1) = E(r_{h+1} \mid \mathcal{F}_h) = c_0 - b_1\varepsilon_h$$
$$e_h(1) = r_{h+1} - \hat{r}_h(1) = \varepsilon_{h+1}$$
$$\mathrm{var}(e_h(1)) = \sigma_\varepsilon^2$$

- prognoza 2 kroki naprzód:

$$\hat{r}_h(2) = E(r_{h+2} \mid \mathcal{F}_h) = c_0$$
$$e_h(2) = r_{h+2} - \hat{r}_h(2) = \varepsilon_{h+2} - b_1\varepsilon_{h+1}$$
$$\mathrm{var}(e_h(2)) = (1 + b_1^2)\sigma_\varepsilon^2$$

- ogólnie, prognoza l kroków naprzód, $l > 1$:

$$\hat{r}_h(l) = c_0$$
$$e_h(l) = r_{h+l} - \hat{r}_h(l) = \varepsilon_{h+l} - b_1\varepsilon_{h+l-1}$$
$$\mathrm{var}(e_h(l)) = (1 + b_1^2)\sigma_\varepsilon^2$$

Analogicznie, dla modeli MA(2) mamy:

- prognoza 1 krok naprzód:

$$\hat{r}_h(1) = E(r_{h+1} \mid \mathcal{F}_h) = c_0 - b_1\varepsilon_h - b_2\varepsilon_{h-1}$$
$$e_h(1) = r_{h+1} - \hat{r}_h(1) = \varepsilon_{h+1}$$
$$\mathrm{var}(e_h(1)) = \sigma_\varepsilon^2$$

- prognoza 2 kroki naprzód:

$$\hat{r}_h(2) = c_0 - b_2\varepsilon_h$$
$$e_h(2) = r_{h+2} - \hat{r}_h(2) = \varepsilon_{h+2} - b_1\varepsilon_{h+1}$$
$$\mathrm{var}(e_h(2)) = (1 + b_1^2)\sigma_\varepsilon^2$$

- prognoza l kroków naprzód:

$$\hat{r}_h(l) = c_0, \text{ dla } l > 2$$

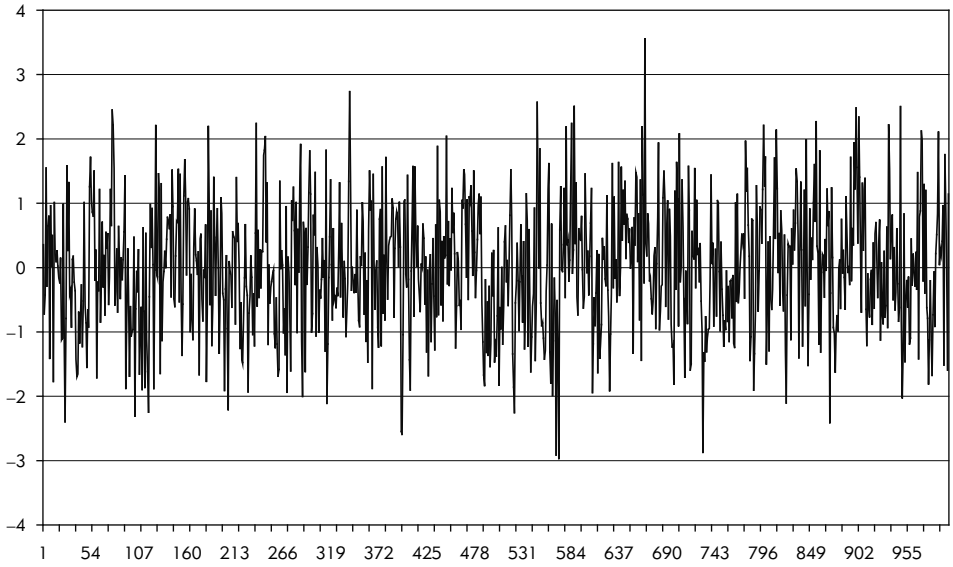
Ogólnie w wypadku modelu MA(q), prognozy o więcej niż q kroków naprzód są równe średniej c_0.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

2.5. Modele ARMA

Omówimy teraz grupę modeli liniowych, które łączą ze sobą specyfikacje modeli AR i MA, dzięki czemu mogą opisać długotrwałe zależności za pomocą mniejszej liczby parametrów. Podobnie jak poprzednio, najpierw rozważymy dokładniej najprostszy z tej rodziny model ARMA(1,1). Przykładowa trajektoria z takiego modelu została przedstawiona na ilustracji 2.12.

Ilustracja 2.12. Przykładowa trajektoria procesu ARMA(1,1) z $a_1 = 0{,}7$, $b_1 = 0{,}5$ oraz $\varepsilon_t \sim N(0,1)$



2.5.1. Model ARMA(1,1)

Model ten jest opisany za pomocą równania:

$$r_t - a_1 r_{t-1} = a_0 + \varepsilon_t - b_1 \varepsilon_{t-1} \tag{2.39}$$

gdzie ε_t jest ścisłym białym szumem z zerową średnią i $a_1 \neq b_1$.

2.5.1.1. Stacjonarność modelu ARMA(1,1)

Jeśli szereg r_t jest kowariancyjnie stacjonarny, to z równania (2.38) otrzymujemy (biorąc obustronnie wartość oczekiwaną):

$$E(r_t) = \mu = \frac{a_0}{1 - a_1} \tag{2.40}$$

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

$$\text{var}(r_t) = \gamma_0 = \frac{(1-2a_1b_1+b_1^2)\sigma_\varepsilon^2}{1-a_1^2} \tag{2.41}$$

Zatem warunkiem słabej stacjonarności jest $-1 < a_1 < 1$.

2.5.1.2. ACF dla ARMA(1,1)

Przyjmijmy dla uproszczenia rachunków w równaniu (2.39), że $a_0 = 0$, i pomnóżmy równanie $r_t - a_1 r_{t-1} = \varepsilon_t - b_1\varepsilon_{t-1}$ obustronnie przez r_{t-l}. Otrzymujemy wtedy:

$$r_t r_{t-l} - a_1 r_{t-1} r_{t-l} = \varepsilon_t r_{t-l} - b_1 \varepsilon_{t-1} r_{t-l}$$

Dla $l = 1$, biorąc obustronnie wartość oczekiwaną i wykorzystując fakt, że $E(r_t\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$, dostajemy związek dla kowariancji:

$$\gamma_1 - a_1\gamma_0 = -b_1\sigma_\varepsilon^2 \tag{2.42}$$

Dla $l = 2$ otrzymujemy natomiast $\gamma_2 - a_1\gamma_1 = 0$. Tak samo dla wszystkich $l > 1$

$$\gamma_l - a_1\gamma_{l-1} = 0 \tag{2.43}$$

Dzieląc obustronnie równania (2.42) i (2.43), otrzymujemy następujące relacje dla ACF modelu ARMA(1,1):

$$\rho_1 = a_1 - \frac{b_1\sigma_\varepsilon^2}{\gamma_0} \tag{2.44a}$$

$$\rho_l = a_1\rho_{l-1}, \text{ dla } l > 1 \tag{2.44b}$$

Wynika z tego, że przy $l \to \infty$, ACF dąży do zera w tempie wykładniczym.

2.5.1.3. PACF

Można wykazać, że PACF dla procesu ARMA(1,1) nie znika przy żadnym opóźnieniu. Podobnie zachowuje się PACF dla MA(1) – poza tym, że wykładnicze zanikanie wartości PACF dla procesu ARMA(1,1) zaczyna się dopiero od opóźnienia 2, a nie, jak dla MA(1), od opóźnienia 1.

2.5.2. Model ARMA(*p*,*q*)

Ogólna postać modelu ARMA(*p*,*q*) jest następująca:

$$r_t = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i r_{t-i} + \varepsilon_t - \sum_{i=1}^{q} b_i \varepsilon_{t-i} \tag{2.45}$$

gdzie ε_t jest ścisłym białym szumem z zerową średnią, a p i q są nieujemnymi liczbami całkowitymi.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Równość (2.45) możemy zapisać za pomocą operatora opóźnienia L^k, $L^k r_t = r_{t-k}$, jako:

$$(1 - a_1 L - \ldots - a_p L^p) r_t = a_0 + (1 - b_1 L - \ldots - b_q L^q)\varepsilon_t \tag{2.46}$$

Wielomian $a(L) \equiv 1 - a_1 L - a_2 L^2 - \ldots - a_p L^p$ nazywamy wielomianem AR, a wielomian $b(L) \equiv 1 - b_1 L - b_2 L^2 - \ldots - b_q L^q$ – wielomianem MA. Żądamy, by wielomiany $a(L)$ i $b(L)$ nie miały wspólnych czynników, gdyż w przeciwnym wypadku rząd (p,q) modelu ARMA(p,q) można zredukować.

Model ARMA(p,q) jest kowariancyjnie stacjonarny, gdy wszystkie pierwiastki wielomianu $a(L)$ mają moduły większe od 1. Gdy spełniony jest ten warunek, wtedy średnia procesu ARMA(p,q) określonego wzorem (2.45) jest równa:

$$E(r_t) = \frac{a_0}{1 - a_1 - \ldots - a_p} \tag{2.47}$$

2.5.3. Identyfikacja modeli ARMA

ACF i PACF nie niosą informacji użytecznych przy wyborze rzędu modelu ARMA. Przy wyborze modelu ARMA można kierować się wskazaniami kryteriów informacyjnych przedstawionych przy omawianiu identyfikacji modeli AR. Zazwyczaj dla pewnych wybranych dodatnich liczb całkowitych P i Q wylicza się wartości kryteriów AIC (lub BIC) dla modeli ARMA(p,q), gdzie $0 \le p \le P$ oraz $0 \le q \le Q$. Podejście takie wymaga estymowania za pomocą metody największej wiarygodności wielu modeli i w pewnych wypadkach może prowadzić do nadmiernego dopasowania, czyli wybrania modelu ze zbyt dużą liczbą parametrów.

Parametry wybranego modelu ARMA(p,q) mogą być estymowane za pomocą metody największej wiarygodności warunkowej lub dokładnej. Dodatkowo sprawdza się jakość dopasowania modelu, stosując test Boxa–Pierce'a lub Ljunga–Boxa do reszt. Jeśli specyfikacja modelu jest poprawna, to statystyka $Q(m)$ ma asymptotycznie rozkład $\chi^2(m - p - q)$.

estymacja parametrów wybranego modelu ARMA

2.5.4. Prognozowanie za pomocą modeli ARMA

Prognoza 1 krok naprzód za pomocą modelu ARMA(p,q) ma postać:

$$\hat{r}_h(1) = E(r_{h+1} \mid \mathcal{F}_h) = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i r_{h+1-i} - \sum_{i=1}^{q} b_i \varepsilon_{h+1-i}$$

przy czym błąd prognozy wynosi $e_h(1) = r_{h+1} - \hat{r}_h(1) = \varepsilon_{h+1}$ i ma wariancję $\mathrm{var}(e_h(1)) = \sigma_\varepsilon^2$.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ogólnie, w wypadku prognozy l kroków naprzód mamy:

$$\hat{r}_h(l) = E(r_{h+l} \mid \mathcal{F}_h) = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i \hat{r}_h(l-i) - \sum_{i=1}^{q} b_i \varepsilon_h(l-i) \tag{2.48}$$

gdzie:

$\hat{r}_h(l-i) = r_{h+l-i}$, jeśli $l - i \le 0$
$\varepsilon_h(l-i) = 0$, jeśli $l - i > 0$
$\varepsilon_h(l-i) = \varepsilon_{h+l-i}$, jeśli $l - i \le 0$

Prognozy kilka kroków naprzód mogą więc być wyznaczane rekurencyjnie.

2.5.5. Inne reprezentacje modelu ARMA

Rozważmy model ARMA(p,q) w postaci (2.46). Dla danych wielomianów $a(L) \equiv 1 - a_1L - a_2L^2 - \ldots - a_pL^p$ i $b(L) \equiv 1 - b_1L - b_2L^2 - \ldots - b_qL^q$ oznaczmy:

$$\frac{b(L)}{a(L)} = 1 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \cdots \equiv \psi(L) \tag{2.49}$$

$$\frac{a(L)}{b(L)} = 1 - \pi_1 L - \pi_2 L^2 - \cdots \equiv \pi(L) \tag{2.50}$$

Wzory (2.49) i (2.50) należy rozumieć w ten sposób, że jeśli $\psi(L)$ pomnożymy formalnie przez $a(L)$, to otrzymany formalny szereg potęgowy ma dla każdego $k = 1, 2, \ldots$ takie same współczynniki przy L^k jak wielomian $b(L)$. Na przykład, jeśli $a(L) = 1 - a_1(L)$ i $b(L) = 1 - b_1(L)$, to:

$$\psi(L) = \frac{1-b_1L}{1-a_1L} = 1 + (a_1 - b_1)L + a_1(a_1 - b_1)L^2 + a_1^2(a_1 - b_1)L^3 + \cdots$$

$$\pi(L) = \frac{1-a_1L}{1-b_1L} = 1 - (a_1 - b_1)L - b_1(a_1 - b_1)L^2 - a_1^2(a_1 - b_1)L^3 - \cdots$$

Zauważmy również, że $\psi(L)\pi(L) = 1$ oraz:

$$\frac{a_0}{b(1)} = \frac{a_0}{1 - b_1 - \cdots - b_q}$$

$$\frac{a_0}{a(1)} = \frac{a_0}{1 - a_1 - \cdots - a_p}$$

Stosując (2.50), model ARMA (p,q) można zapisać w postaci:

$$r_t = \frac{a_0}{1 - b_1 - \cdots - b_q} + \pi_1 r_{t-1} + \pi_2 r_{t-2} + \pi_2 r_{t-2} + \cdots + \varepsilon_t \tag{2.51}$$

Reprezentacja (2.51), zwana reprezentacją AR, pokazuje zależność bieżącego zwrotu r_t od opóźnionych zwrotów r_{t-i}, gdzie $i > 0$. Współczynniki π_i noszą nazwę π-wag modelu ARMA. Aby wkład opóźnionych zwrotów r_{t-i} w r_t malał

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

wraz ze wzrostem i, współczynniki π_i powinny dążyć do zera, gdy i rośnie. Jest tak, gdy $\sum_{i=1}^{\infty} |\pi_i| < \infty$. Model ARMA mający taką własność nazywa się odwracalnym. W modelu AR(p), $b(L) = 1$, czyli $\pi_i = 0$ dla $i > p$, a więc model ten jest odwracalny. Dla innych modeli ARMA warunkiem dostatecznym odwracalności jest to, by wszystkie pierwiastki wielomianu $b(L)$ miały moduły większe od 1. Na przykład model MA(1), $r_t = (1 - b_1 L)\varepsilon_t$, jest odwracalny, jeśli $|1 / b_1| > 1$, czyli $|b_1| < 1$.

odwracalny model ARMA

Stosując (2.49), model ARMA (p,q) można zapisać w postaci:

$$r_t = \mu + \varepsilon_t + \psi_1\varepsilon_{t-1} + \psi_2\varepsilon_{t-2} + \ldots = \mu + \psi(L)\varepsilon_t \tag{2.52}$$

gdzie $\mu = E(r_t) = a_0/(1 - a_1 - \ldots - a_p)$.

Reprezentacja (2.52), zwana reprezentacją MA, pokazuje bezpośrednio wpływ przeszłego zaburzenia (szoku) ε_{t-i} $(i > 0)$ na bieżący zwrot. Współczynniki ψ_i noszą nazwę funkcji odpowiedzi na impuls (*impulse response function*). Dla kowariancyjnie stacjonarnego modelu ARMA, współczynniki ψ_i znikają w tempie wykładniczym wraz ze wzrostem i, co oznacza, że wpływ szoków ε_{t-i} na zwrot r_t maleje z upływem czasu. Zatem dla stacjonarnego modelu ARMA szok ε_{t-i} nie wywiera trwałego wpływu na szereg. Jeśli $a_0 \neq 0$, to reprezentacja MA zawiera składnik stały, którym jest średnia procesu r_t (równa $a_0/(1 - a_1 - \ldots - a_p)$).

funkcje odpowiedzi na impuls

Reprezentacja (2.52) może być wykorzystana do wyznaczenia wariancji błędu prognozy. Na podstawie (2.52) mamy:

$$\hat{r}_h(l) = E(r_{h+l} \mid \mathcal{F}_h) = \mu + \psi_l\varepsilon_h + \psi_{l+1}\varepsilon_{h-1} + \cdots \tag{2.53}$$

Zatem:

$$e_h(l) = \varepsilon_{h+l} + \psi_1\varepsilon_{h+l-1} + \ldots + \psi_{l-1}\varepsilon_{h+l}$$

a stąd:

$$\text{var}(e_h(l)) = (1 + \psi_1^2 + \ldots + \psi_{l-1}^2)\sigma_\varepsilon^2 \tag{2.54}$$

Ponieważ $\hat{r}_h(l)$ jest warunkową wartością oczekiwaną zmiennej r_{h+l} w początku prognozy, a z (2.53) wynika, że dla stacjonarnego procesu ARMA $\hat{r}_h(l) \to \mu$ przy $l \to \infty$, zatem stacjonarny proces ARMA ma własność, która nosi nazwę *powracania do średniej* (*mean-reverting*). Ponadto z (2.52) i (2.54) wynika, że:

powracanie do średniej

$$\text{var}(e_h(l)) \to \text{var}(r_t) \text{ przy } l \to \infty.$$

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

2.6. Od teorii do praktyki

Przedstawione w podrozdziale 1.7 oszacowania ACF dla analizowanych szeregów w zasadzie wskazywały na możliwość istnienia zależności liniowej jedynie w wypadku szeregów WIG*d* oraz WIBOR3M. Analizując ilustracje 2.13 i 2.14, możemy ocenić wartości PACF dla tych szeregów i na tej podstawie możemy próbować wnioskować na temat typu modelu liniowego opisującego średnią warunkową dla każdego z rozważanych szeregów zwrotów.

Ilustracja 2.13. WIG*d*. Oszacowanie PACF

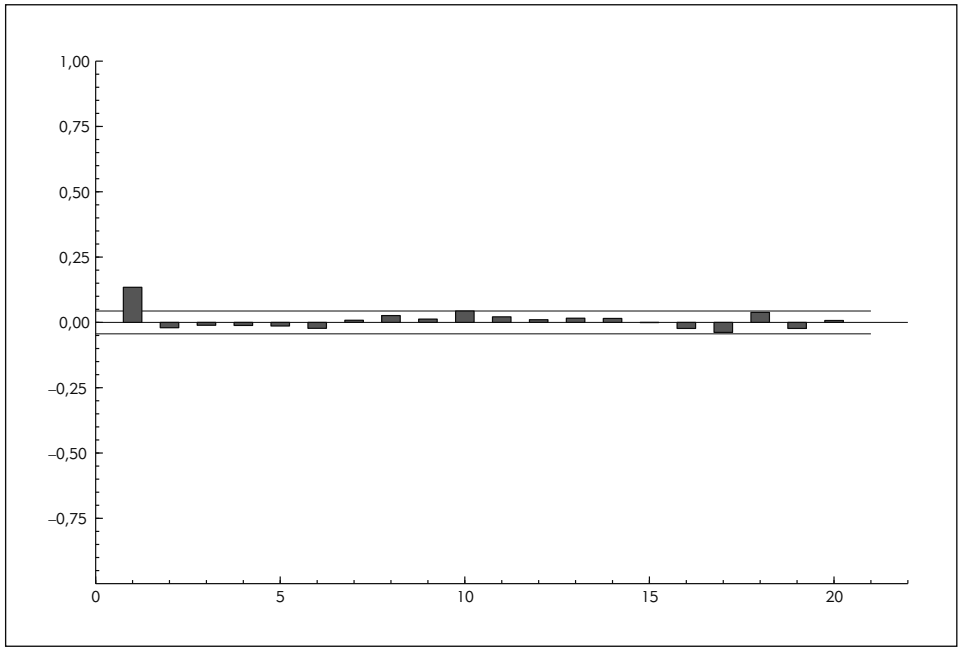


Tabela 2.1 przedstawia procedurę wyboru modelu ARMA(p,q) w zależności od stosowanego kryterium informacyjnego. Ze względu na zgodność z obliczeniami przedstawianymi w kolejnych rozdziałach rozważamy tylko pierwszych 1996 obserwacji szeregu WIG*d*. Najogólniejsza postać szacowanego równania była następująca:

$$r_t = a_1 r_{t-1} + a_2 r_{t-2} + \varepsilon_t - b_2 \varepsilon_{t-1} - b_2 \varepsilon_{t-2}$$

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 2.14. WIBOR3M. Oszacowanie PACF

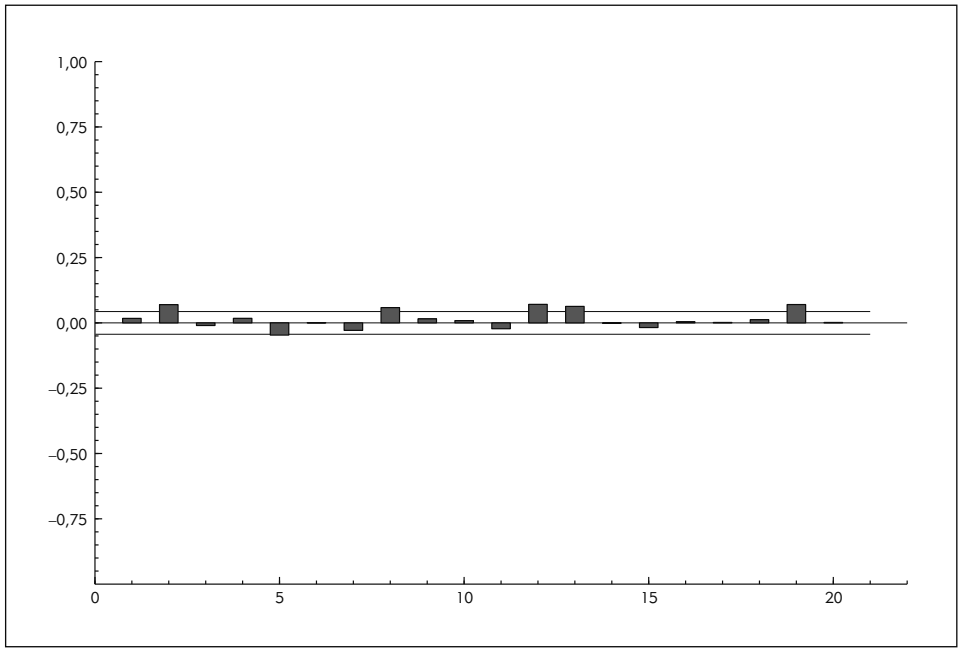


Tabela 2.1. Procedura wyboru modelu ARMA oparta na kryteriach informacyjnych

p	*q*	BIC	AIC	Hannana–Quinna	Shibaty
0	0	11,0290	11,0262	11,0273	11,0262
1	0	3,9704	3,9648	3,9669	3,9648
0	1	3,9712	3,9656	3,9677	3,9656
1	1	3,9742	3,9658	3,9689	3,9658
2	0	3,9720	3,9636	3,9667	3,9636
0	2	3,9750	3,9666	3,9697	3,9666
2	1	3,9710	3,9598	3,9639	3,9598
1	2	3,9773	3,9661	3,9702	3,9661
2	2	3,9744	3,9603	3,9655	3,9603

Jak często zdarza się w praktyce, kryteria wskazały nam różne modele. Kryterium Schwarza (BIC) wskazało jako najlepszy model AR(1). Tabela 2.2 pokazuje oszacowania parametrów. Najbardziej rozbudowany model ARMA(2,2) wybrany przez kryteria Akaike i Shibaty możemy odrzucić ze względu na nieistotne oszacowania dwóch parametrów. Wyniki oszacowań ACF i PACF

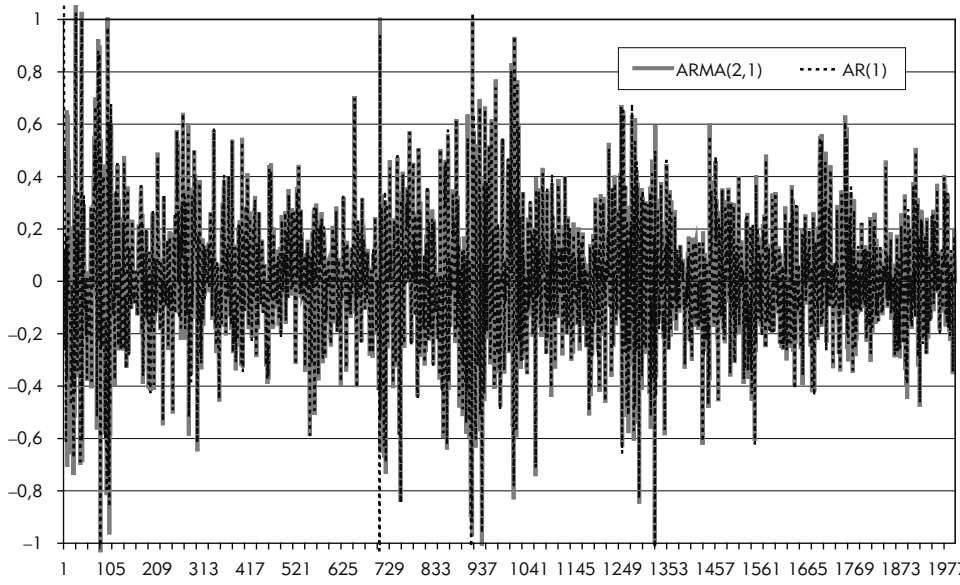
Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

wydają się również wspierać model AR(1). Przyglądając się ilustracji 2.15, możemy porównać oszacowania średniej warunkowej stopy zwrotu z modeli AR(1) i ARMA(2,1). Nie powinniśmy przy tym zapominać o ilustracji 2.8.

Tabela 2.2. Oszacowania parametrów modeli ARMA wskazanych przez kryteria informacyjne. W nawiasach błędy standardowe

Parametr	ARMA(1,0)	ARMA(2,1)	ARMA(2,2)
a_1	0,1375 (0,0362)	–0,6889 (0,0491)	–0,8028 (0,1448)
a_2		0,1091 (0,0372)	0,0002 (0,0018)
b_1		–0,8304 (0,0384)	–0,9481 (0,1464)
b_2			–0,1154 (0,1369)

Ilustracja 2.15. WIG*d*. Porównanie oszacowań w próbie średnich warunkowych uzyskanych za pomocą modeli AR(1) i ARMA(2,1) dla stóp zwrotu



Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

zasada wyboru modelu

Ogólna zasada wyboru modelu jest następująca. Jeżeli myślimy o wykorzystaniu modelu do prognozowania, to rozsądnie jest stosować zasadę oszczędności modelu i kierować się kryterium BIC oraz odrzucać modele z nieistotnymi oszacowaniami parametrów. Często bowiem prostsze, a nawet nieco gorzej dopasowane modele wykazują większą elastyczność przy dostosowywaniu się do zmieniających się danych i – dzięki temu – pozwalają na uzyskanie lepszej jakości prognoz. Jeżeli natomiast zależy nam na wychwyceniu szczególnego typu zależności występujących na rynkach finansowych i świadomie wprowadzamy do modelu dodatkowe zmienne objaśniające, to rozsądniej jest stosować kryteria mniej restrykcyjne, jeśli chodzi o liczbę parametrów.

2.7. Uwagi

Przedstawione tu podejście do opisu modeli AR, MA i ARMA w dużej mierze naśladuje podręcznik Tsaya (2005). Jest to jeden z najlepszych (a nawet po prostu najlepszy) istniejący podręcznik z zakresu analizy finansowych szeregów czasowych. Wydawało nam się, że bardziej sensownym rozwiązaniem będzie podporządkowanie się zaproponowanej tam logice wykładu niż wymyślanie czegoś innego, po to tylko, żeby się odróżnić. Bardzo obszerne i ścisłe, a jednocześnie przystępne przedstawienie metod analizy szeregów czasowych można znaleźć w książce Hamiltona (1994).

Spośród podręczników w języku polskim, z których można korzystać przy studiowaniu tematyki omawianej w tym rozdziale, należy wymienić książki Welfe (2003) oraz Osińskiej (2006, 2007).

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

3

Modelowanie heteroskedastyczności warunkowej

zmienność instrumentu finansowego

Zmienność instrumentu finansowego (akcji, obligacji, kursu walutowego, indeksu giełdowego), rozumiana jako wariancja warunkowa (lub warunkowe odchylenie standardowe) jego zwrotu, należy do najważniejszych pojęć w nowoczesnych finansach i ekonometrii finansowej. Przykładowo, jest to najważniejsza wielkość wykorzystywana przy wycenie opcji, odgrywa ona także kluczową rolę w szacowaniu wartości zagrożonej (*Value at Risk* – VaR), stosowanej w ilościowym zarządzaniu ryzykiem. Specyficzną cechą zmienności jest to, że nie jest ona bezpośrednio obserwowalna i jej szacowanie wymaga przyjęcia odpowiedniego modelu. W modelowaniu zmienności instrumentów finansowych ważną rolę odgrywają charakterystyczne cechy ich dziennych zwrotów. Przejawiają się one, na przykład, w istnieniu skupisk zmienności: zmienność bywa wysoka w pewnych okresach, a niska w innych, w szczególności nie jest ona stała, lecz ewoluuje w czasie. Tę własność zwrotów nazywa się heteroskedastycznością warunkową.

heteroskedastyczność warunkowa

Metodologiczna koncepcja i konkretna specyfikacja modelu, w którym warunkowe wariancje zależą nietrywialnie od przeszłych stanów gospodarki i ewoluują w czasie, pojawiła się po raz pierwszy w pracy Engle'a (1982), dotyczącej zmienności inflacji w Wielkiej Brytanii. Zaproponowany przez Engle'a model autoregresyjnej heteroskedastyczności warunkowej (*Autoregressive Conditional Heteroskedasticity* – ARCH), podlegał następnie licznym rozszerzeniom i modyfikacjom, znajdując zastosowania w modelowaniu finansowych i makroekonomicznych szeregów czasowych, a przede wszystkim w analizie zmienności cen szeroko rozumianych instrumentów finansowych. Pojawiły się też liczne inne modele zmienności o specyfikacjach bardzo odmiennych od specyfikacji ARCH. Wszystkie je łączy jednak pewna wspólna filozofia, którą przedstawimy w pierwszym podrozdziale tego rozdziału – cały rozdział 3 stanowi bowiem wprowadzenie do tematyki modeli GARCH. Podajemy tu tylko informacje

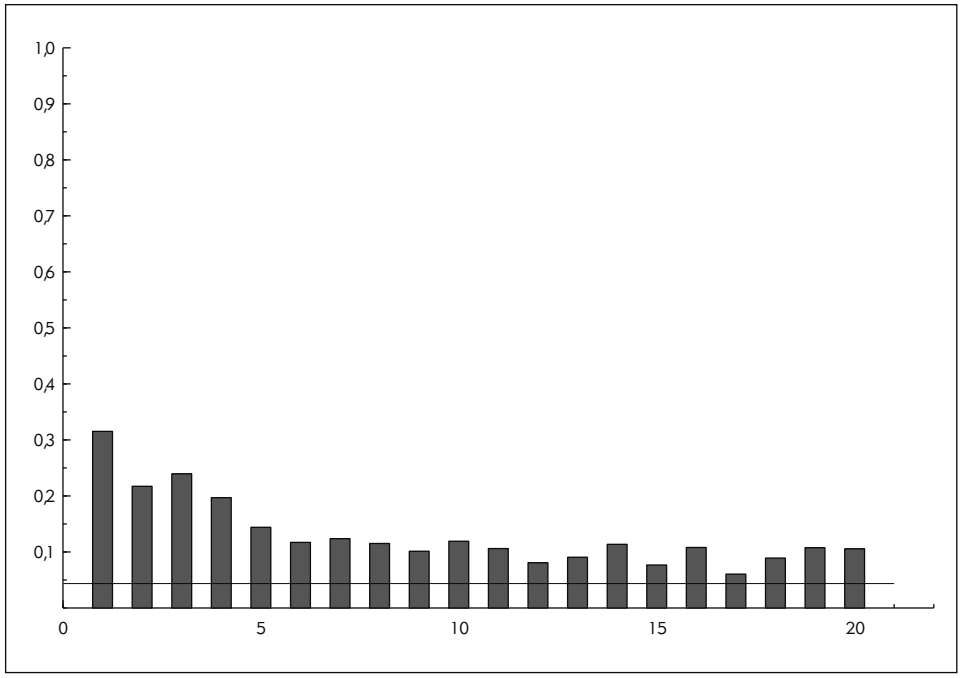
Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

niezbędne do przeprowadzania przez czytelnika pierwszych samodzielnych prób modelowania zmienności. Bardziej zaawansowane zagadnienia związane z modelami GARCH przedstawiamy w kolejnych rozdziałach.

3.1. Ogólna struktura modelu zmienności

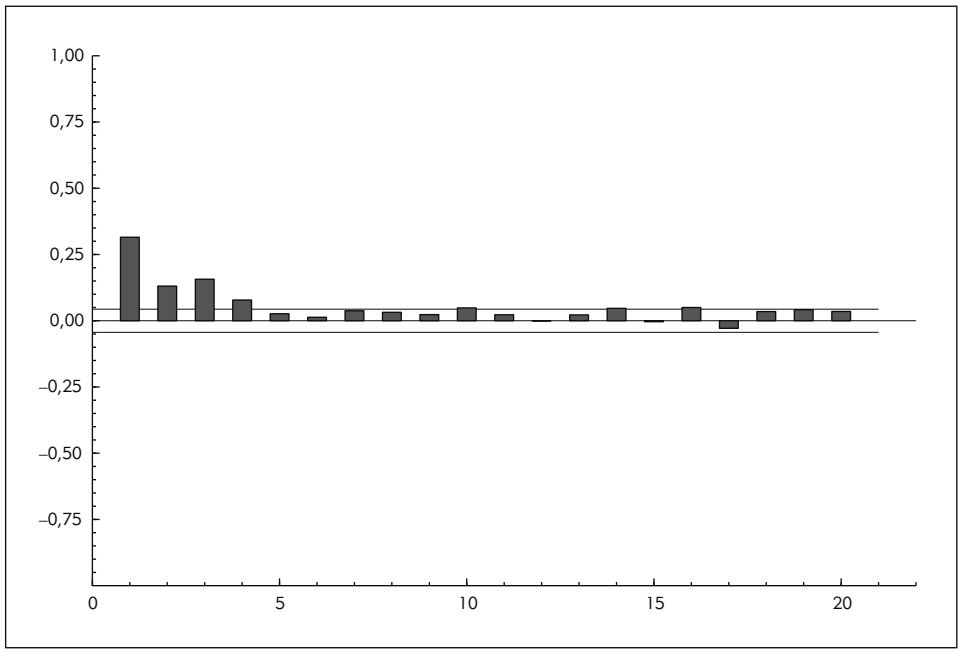
Jak już wspomnieliśmy w podrozdziale 1.6, w szeregach stóp zwrotów zależności liniowe nie występują wcale albo są słabe. Powszechna jest jednak opinia o istnieniu silnych powiązań nieliniowych w tego typu szeregach. Dla przykładu, przedstawione na ilustracjach 3.1–3.2 wykresy ACF i PACF dla kwadratów stóp zwrotu indeksu WIG wskazują na istnienie silnych i dość trwałych powiązań. Własność ta, nazywana efektem ARCH, stanowi podstawę do konstrukcji większości modeli zmienności, rozumianej – jak wspomniano powyżej – jako wariancja warunkowa (lub warunkowe odchylenie standardowe) stopy zwrotu z instrumentu finansowego.

Ilustracja 3.1. WIG. Oszacowanie ACF dla kwadratów zwrotów



Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 3.2. WIG. Oszacowanie PACF dla kwadratów zwrotów



Niech r_t będzie zwrotem z instrumentu finansowego w momencie t. Zmienną r_t można przedstawić w postaci sumy:

$$r_t = \mu_t + y_t \tag{3.1}$$

gdzie $\mu_t = E(r_t \mid \mathcal{F}_{t-1})$ jest średnią warunkową pod warunkiem zbioru $\mathcal{F}_{t-1}$ informacji na temat procesu r_t (czasami także na temat innych procesów) dostępnej do chwili $t-1$ włącznie.

Ściślej mówiąc $\mathcal{F}_{t-1} \subset \mathcal{F}$ jest σ-ciałem generowanym przez zmienne $r_k, k \le t-1$ (a czasami jeszcze przez inne zmienne). Zmienna y_t spełnia zatem z definicji warunek:

$$\sigma_t^2 = \mathrm{var}(r_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) = E(y_t^2 \mid \mathcal{F}_{t-1})$$

Średnią warunkową μ_t opisuje się zazwyczaj za pomocą zależności występujących w modelu ARMA(p,q), czasami włączając do nich dodatkowe zmienne objaśniające. Mogą to być zmienne związane z rynkiem finansowym, np. funkcje wolumenu obrotu czy stopy zwrotu z innych instrumentów finansowych. Stosuje się też czasami wielkości z otoczenia makroekonomicznego rynku lub zmienne zero-jedynkowe pozwalające na wychwycenie zmian strukturalnych czy zjawisk sezonowych w badanym szeregu. Średnia warunkowa ma zazwyczaj postać:

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

$$\mu_t = a_0 + \sum_{i=1}^{k} \delta_i x_{i,t} + \sum_{i=1}^{p} a_i r_{t-i} - \sum_{i=1}^{q} b_i y_{t-i} \tag{3.2}$$

gdzie $x_{i,t}$ są dodatkowymi zmiennymi objaśniającymi.

Modele heteroskedastyczności warunkowej opisują ewolucję w czasie zmiennej σ_t^2. Zależność opisująca tę ewolucję jest wyróżnikiem różnych modeli zmienności. Ogólnie modele heteroskedastyczności warunkowej dzielą się na dwie kategorie. Do pierwszej należą te, w których ewolucja zmienności σ_t^2 opisana jest za pomocą pewnej funkcji deterministycznej. W drugiej natomiast ewolucja zmiennej σ_t^2 określona jest za pomocą zależności typu stochastycznego. Zmienną y_t określoną w (3.1) nazywa się często szokiem lub innowacją zwrotu z instrumentu finansowego w momencie t. Model (3.2) dla μ_t nosi nazwę równania średniej (warunkowej), natomiast model opisujący σ_t^2 nazywa się równaniem zmienności dla zwrotu r_t. Można zatem powiedzieć, że w modelowaniu heteroskedastyczności warunkowej rozszerza się model dla średniej warunkowej modelu szeregu czasowego o równanie dynamiczne sterujące ewolucją w czasie wariancji warunkowej zwrotu instrumentu finansowego.

3.2. Testowanie efektu ARCH

test McLeoda–Li

Przed przystąpieniem do modelowania należy zbadać, czy w rozważanych szeregach rzeczywiście występuje efekt ARCH. Testowaniu poddaje się szereg reszt $y_t = r_t - E(r_t \mid \mathcal{F}_{t-1})$, gdzie średnia warunkowa modelowana jest zazwyczaj za pomocą dopasowanego modelu ARMA. Szczególną popularnością przy testowaniu efektu ARCH cieszą się dwa testy. Pierwszy z nich, zwany testem McLeoda–Li (1983), polega na zastosowaniu statystyki $Q(m)$ Ljunga–Boxa (2.2) do szeregu y_t^2. Drugim jest test Engle'a (1982) nazywany też testem ARCH.

test Engle'a; hipoteza zerowa: nie ma efektu ARCH

Test Engle'a opiera się na regresji:

$$y_t^2 = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{p} \alpha_k y_{t-k}^2 + e_t \tag{3.3}$$

gdzie $t = p + 1, \ldots, T$, a T jest długością szeregu reszt.

Statystyką testową dla hipotezy zerowej H_0: $\alpha_1 = \ldots = \alpha_p = 0$, jest nR^2, gdzie $n = T - p$, a R^2 jest tzw. współczynnikiem determinacji z regresji (3.3), określonym wzorem:

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{t=p+1}^{T} \hat{e}_t^2}{\sum_{t=p+1}^{T} \left(y_t^2 - \frac{1}{n} \sum_{t=p+1}^{T} y_t^2 \right)^2} \tag{3.4}$$

Przy prawdziwej hipotezie zerowej oraz pod warunkiem istnienia momentu $E(y_t^8)$, statystyka nR^2 ma asymptotycznie rozkład $\chi^2(p)$. Jeśli hipoteza zerowa zostanie odrzucona, oznacza to, iż w szeregu zwrotów występuje autoregresyjna heteroskedastyczność warunkowa. Wyniki zależą zwykle od przyjmowanej liczby opóźnień. Najczęściej przy testowaniu efektu ARCH w dziennych zwrotach finansowych przyjmuje się jako opóźnienia $p = 1, 5, 10$. Nie jest to jednak reguła bezwzględna. W zasadzie wybór tych opóźnień powinien być każdorazowo dobierany do badanego szeregu. Dotyczy to zwłaszcza sytuacji, w których zależność pojawia się dopiero przy większej liczbie opóźnień.

3.3. Model ARCH

Model ARCH (Engle 1982) opisuje zależności drugiego stopnia w szeregu y_t (niewykazującym autokorelacji) za pomocą funkcji kwadratowej od opóźnionych wartości, y_{t-i}. Równania modelu ARCH(q) są następujące:

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t \tag{3.5}$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i y_{t-i}^2 \tag{3.6}$$

gdzie ε_t jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie ze średnią zero i wariancją jeden oraz $\omega > 0$ i $\alpha_i \geq 0$ dla $i = 1, \ldots, q$.

Z postaci równania zmienności (3.6) wynika mierzalność zmiennej σ_t^2 względem zbioru informacji (σ-ciała) $\mathcal{F}_{t-1}$, co w związku z (3.5) oznacza, że $\sigma_t^2 = E(y_t^2 \mid \mathcal{F}_{t-1})$, a zatem σ_t^2 jest wariancją warunkową zwrotu r_t.

Równanie (3.6) implikuje zależność skutkującą tym, że duże wartości y_{t-1}^2 ($i = 1, \ldots, q$) pociągają za sobą dużą zmienność σ_t^2. Oznacza to, że w szeregu generowanym przez proces ARCH prawdopodobieństwo wystąpienia po dużej zmianie kolejnych dużych zmian jest większe niż prawdopodobieństwo wystąpienia mniejszych zmian. Ta cecha modeli ARCH czyni je szczególnie przydatnymi w modelowaniu finansowych szeregów czasowych charakteryzujących się występowaniem skupisk zmienności (zob. podrozdział 1.6).

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Średnia bezwarunkowa zmiennej y_t w modelu ARCH(q) jest równa zeru:

$$E(y_t) = E(E(y_t \mid \mathcal{F}_{t-1})) = E(\sigma_t E(\varepsilon_t)) = 0$$

Podobnie jak to czyniliśmy w wypadku modeli liniowych, przyjrzymy się teraz dokładniej własnościom najprostszego modelu ARCH(1) określonego równaniami:

własności modelu ARCH (1)

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t$$
$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 y_{t-1}^2$$

Jeśli szereg y_t jest kowariancyjnie stacjonarny, to:

$$\text{var}(y_t) = E(y_t^2) = E(E(y_t^2 \mid \mathcal{F}_{t-1})) = E(\omega + \alpha_1 y_{t-1}^2) = \omega + \alpha_1 E(y_{t-1}^2) = \omega + \alpha_1 \text{ var}(y_t)$$

a zatem:

$$\text{var}(y_t) = \frac{\omega}{1-\alpha_1}$$

o ile $0 \le \alpha_1 < 1$. Przy założeniu, że zmienne ε_t w (3.5) mają rozkład normalny:

$$E(y_t^4 \mid \mathcal{F}_{t-1}) = 3(E(y_t^2 \mid \mathcal{F}_{t-1}))^2 = 3(\omega + \alpha_1 y_{t-1}^2)$$

a zatem:

$$E(y_t^4) = E(E(y_t^4 \mid \mathcal{F}_{t-1})) = 3E(\omega + \alpha_1 y_{t-1}^2)^2 = 3E(\omega^2 + 2\omega\alpha_1 y_{t-1}^2 + \alpha_1^2 y_{t-1}^4)$$

Jeśli y_t jest szeregiem stacjonarnym czwartego rzędu oraz $E(y_t^4) = m_4$, to:

$$m_4 = 3\omega^2 \left(1 + 2\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\right) + 3\alpha_1^2 m_4$$

a zatem:

$$m_4 = \frac{3\omega^2(1+\alpha_1)}{(1-\alpha_1)(1-3\alpha_1^2)}$$

Z powyższej równości wynika, że w takiej sytuacji $1 - 3\,\alpha_1^2 > 0$ oraz bezwarunkowa kurtoza zmiennej y_t jest większa od 3, gdyż:

$$\frac{E(y_t^4)}{(\text{var}(y_t))^2} = 3\frac{\omega^2(1+\alpha_1)(1-\alpha_1)^2}{(1-\alpha_1)(1-3\alpha_1^2)\omega^2} = 3\frac{(1-\alpha_1^2)}{(1-3\alpha_1^2)} > 3$$

Fakt ten jest w zgodzie z wynikami badań empirycznych, które wskazują, że rozkłady zwrotów finansowych mają ogony grubsze niż w wypadku rozkładu normalnego.

Z powyższych wyliczeń wskazujących niewątpliwie na zalety modelu ARCH, wynikają jednak również ograniczenia i słabości modeli ARCH. Najważniejsze z nich są następujące:

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

ograniczenia i słabości modeli ARCH

- W modelu ARCH zmienność zależy od kwadratów wcześniejszych szoków (zaburzeń), a więc zakłada się, że ujemne i dodatnie szoki o równej wartości bezwzględnej mają taki sam wpływ na zmienność. W badaniach empirycznych natomiast często pojawiają się efekty asymetryczne.
- W wypadku innowacji gaussowskich model ARCH(1) generuje proces mający skończoną kurtozę bezwarunkową, tylko jeśli $0 \le \alpha_1 < 1/\sqrt{3}$. Dla modeli wyższego rzędu warunki gwarantujące skończoną kurtozę są bardziej skomplikowane.
- Modele ARCH nie wyjaśniają, co jest źródłem zmienności finansowych szeregów czasowych. Proponują jedynie pewien sposób opisu ewolucji wariancji warunkowej w czasie.
- Bardzo często adekwatny opis procesu zmienności instrumentu finansowego za pomocą modelu ARCH wymaga zastosowania modelu z dużą liczbą parametrów.

Wymienione tu ograniczenia spowodowały, że modele ARCH zaczęto na różne sposoby rozbudowywać, co doprowadziło do powstania najbardziej znanej rodziny modeli zmienności – GARCH, która cały czas zwiększa swoją liczebność.

3.4. Modele GARCH

Przy stosowaniu modelu ARCH(q), często konieczne było przyjmowanie dużych opóźnień (dużej wartości rzędu q) i w związku z tym estymowanie dużej liczby parametrów. Stanowiło to oczywistą niedogodność. Remedium na tego typu problemy okazał się uogólniony model autoregresyjnej heteroskedastyczności warunkowej (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity* – GARCH), zaproponowany w roku 1986 przez Bollersleva, w którym do równania zmienności wprowadzone zostały dodatkowo jej opóźnione wartości (Bollerslev 1986). Modyfikacja ta zredukowała liczbę koniecznych do estymowania parametrów tak radykalnie, że najczęściej stosowanym w praktyce modelem GARCH jest trójparametrowy model GARCH(1,1). W celu wychwycenia pewnych specyficznych zależności między zwrotami a zmiennością podstawowy model GARCH ulegał dalszym rozszerzeniom, polegającym na dołączaniu dodatkowych parametrów strukturalnych w równaniu zmienności lub na transformacji postaci tego równania. Jedną z największych zalet modeli z rodziny GARCH jest możliwość rozbudowywania określających je równań przez wprowadzenie różnego typu zmiennych egzogenicznych (dodatkowych

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

zmiennych objaśniających). Tak przekształcony model pozwala, na przykład, na powiązanie dynamiki zmienności z procesami zachodzącymi w otoczeniu gospodarczym rynku i dokonanie sensownej interpretacji wychwyconych zależności.

zalety modeli GARCH

Prosty sposób budowania modeli, łatwość ich estymacji oraz istniejąca naturalna interpretacja spowodowały, że modele z rodziny GARCH są najpowszechniej stosowanymi modelami zmienności instrumentów finansowych. Z punktu widzenia teoretyczno-statystycznego modele GARCH można traktować jako grupę nieliniowych modeli szeregów czasowych, które pozwalają na dość wyczerpującą analizę dynamiki generujących te szeregi procesów. Z tego względu są one bardzo popularne. Modele te mają oczywiście również słabości, zwrócimy na nie uwagę przy omawianiu ich własności.

Model GARCH(p,q), opisuje się równaniami:

specyfikacja modelu GARCH

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t \tag{3.7}$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \tag{3.8}$$

gdzie $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0,1)$, $\omega > 0$, $\alpha_1 \geq 0$ oraz $\beta_j \geq 0$.

interpretacja parametrów modelu GARCH

Równanie wariancji warunkowej (3.8) uzależnia zmienność od jej wartości z przeszłości oraz od wartości zaobserwowanych kwadratów stóp zwrotu. Parametry α_i decydują zatem o wpływie, jaki na zmienność mają nowe napływające informacje zawarte w kwadratach y_{t-i}^2, natomiast parametry β_j charakteryzują tę część dynamiki, która obrazuje oczekiwania rynku dotyczące tego, że proces zmienności będzie przebiegał w przyszłości, podobnie jak dotychczas.

Gdy wszystkie pierwiastki wielomianu $1 - \beta(L)$, gdzie $\beta(L) \equiv \beta_1 L + ... + \beta_p L^p$, mają moduł większy od 1, równanie (3.8) można przedstawić w postaci modelu ARCH(∞):

$$\sigma_t^2 = \frac{\omega}{1-\beta(1)} + \frac{\alpha(L)}{1-\beta(L)} y_t^2 = \frac{\omega}{1-\beta_1 - \cdots - \beta_p} + \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i y_{t-i}^2 \tag{3.9}$$

Dla procesu generowanego przez model GARCH(p,q), zmienność σ_t^2 zależy zatem, teoretycznie, od nieskończonej liczby opóźnionych kwadratów zwrotów y_{t-i}^2, chociaż oczywiście, siła tej zależności zmniejsza się wraz ze wzrostem opóźnienia.

ciąg różnic martyngałowych

Niech $u_t = y_t^2 - \sigma_t^2$. Wówczas $E(u_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) = 0$. Proces u_t o takiej własności nazywa się ciągiem różnic martyngałowych względem ciągu σ-ciał ($\mathcal{F}_t$). W szczególności, taki

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

proces u_t jest nieskorelowany. Model GARCH(p,q) może być więc również interpretowany jako model typu ARMA(m, p) dla y_t^2, określony równaniem:

$$y_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i + \beta_i) y_{t-i}^2 - \sum_{i=1}^{p} \beta_i u_{t-i} + u_t \tag{3.10}$$

gdzie $m = \max(p,q)$, $\alpha_i = 0$ dla $i > q$ oraz $\beta_i = 0$ dla $i > p$.

kowariancyjna stacjonarność w modelu GARCH

W odróżnieniu od definicji modelu ARMA podanej w (2.45), proces u_t jest tutaj białym szumem z zerową średnią, ale niekoniecznie ścisłym białym szumem. Z podanego w rozdziale 2 warunku kowariancyjnej stacjonarności modelu ARMA, w połączeniu z warunkami $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$, wynika, iż przy założeniu, że:

$$\sum_{i=1}^{q} \alpha_i + \sum_{j=1}^{p} \beta_j < 1$$

proces y_t generowany przez model GARCH(p,q) jest kowariancyjnie stacjonarny. Na podstawie wzoru (2.47), w takiej sytuacji wariancja procesu y_t jest równa:

$$E\left(y_t^2\right) = \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i - \sum_{j=1}^{p} \beta_j} \tag{3.11}$$

prognozy zmienności

Prognoza $\sigma_h^2(l)$ zmienności na l dni naprzód, wyliczana za pomocą modelu GARCH(p,q), wyraża się wzorem:

$$\sigma_h^2(l) = E(\sigma_{h+l}^2 \mid \mathcal{F}_h) = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i y_h^2(l-i) + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_h^2(l-j) \tag{3.12}$$

gdzie:

$y_h^2(l-i) = \sigma_h^2(l-i)$ dla $l - i > 0$
$y_h^2(l-i) = y_{h+l-i}^2$ i $\sigma_h^2(l-i) = \sigma_{h+l-i}^2$ dla $l - i \leq 0$

W szczególności, dla modelu GARCH(1,1):

$$\sigma_h^2(l) = \mathrm{E}(\sigma_{h+1} \mid \mathcal{F}_h) = \omega + (\alpha_1 + \beta_1)\sigma_h^2(l-1) \tag{3.13}$$

gdzie $l > 1$.

Zalety, ale także i niedostatki modeli GARCH(p,q) łatwiej można prześledzić, analizując najprostszy i najbardziej popularny z tych modeli, GARCH(1,1). W wypadku tego modelu wzory na autokorelacje szeregu (y_t^2), wyprowadzone w pracy Bollersleva (1988), przy założeniu kowariancyjnej stacjonarności ($\alpha_1 + \beta_1 < 1$), mają postać:

$$\rho_1 = \alpha_1 + \frac{\alpha_1^2 \beta_1}{1 - 2\alpha_1\beta_1 - \beta_1^2} \tag{3.14}$$

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

$$\rho_k = (\alpha_1 + \beta_1)^{k-1}\rho_1 \tag{3.15}$$

dla $k = 2, 3, \ldots$

Ze wzorów tych wynika, że korelacja zanika w tempie wykładniczym, chociaż gdy $\alpha_1 + \beta_1$ jest bliskie 1, zanikanie to jest bardzo wolne.

Przez iterację wzoru (3.13) można łatwo otrzymać wzór na prognozę zmienności l dni naprzód z modelu GARCH(1,1) w postaci:

$$\sigma_h^2(l) = \omega\sum_{i=0}^{l-2}(\alpha_1 + \beta_1)^i + (\alpha_1 + \beta_1)^{l-1}\sigma_h^2(1) \tag{3.16}$$

Jeśli model jest kowariancyjnie stacjonarny, czyli jeśli $\alpha_1 + \beta_1 < 1$, to powyższe równanie jest równoważne z następującym:

$$\sigma_h^2(l) = \sigma^2 + (\alpha_1 + \beta_1)^{l-1}(\sigma_h^2(1) - \sigma^2) \tag{3.17}$$

gdzie $\sigma^2 = \dfrac{\omega}{1-\alpha_1-\beta_1}$ jest wariancją bezwarunkową.

Wpływ zmienności σ_{h+1}^2 na prognozę $\sigma_h^2(l)$ maleje zatem wraz z wydłużaniem horyzontu prognozy l również w tempie wykładniczym, przy czym w granicy, przy założeniu kowariancyjnej stacjonarności, otrzymujemy wariancję bezwarunkową zmiennej y_t.

Jedną z ważniejszych własności modelu GARCH(1,1) jest to, że bezwarunkowy moment czwartego rzędu dla y_t jest skończony, jeśli:

$$(\alpha_1 + \beta_1)^2 + 2\alpha_1^2 < 1 \tag{3.18}$$

Jeśli ponadto innowacje ε_t z równania (3.7) mają rozkład normalny, to kurtoza zmiennej y_t wyraża się wzorem:

$$\kappa = \frac{3(1-(\alpha_1+\beta_1)^2)}{1-(\alpha_1+\beta_1)^2-2\alpha_1^2} \tag{3.19}$$

i wobec tego jest (dla $\alpha_1 > 0$) większa od 3. Oznacza to, że rozkład bezwarunkowy zmiennej y_t nie jest normalny i lepiej od rozkładu normalnego oddaje własności empirycznych szeregów zwrotów finansowych, charakteryzujących się zwykle grubymi ogonami rozkładów. Otrzymujemy przy tym warunek konieczny istnienia kurtozy, wyrażający się nierównością:

warunek konieczny istnienia kurtozy

$$(\alpha_1 + \beta_1)^2 + 2\alpha_1^2 < 1 \tag{3.20}$$

co stanowi przykład dość istotnego ograniczenia modelu.

Jeżeli korzystamy z możliwości, o której wspomniano na początku tego podrozdziału, i wprowadzamy do równania wariancji warunkowej (3.8) dodatkowe zmienne objaśniające $s_{1,t}, \ldots, s_{m,t}$ (mogą to być te same zmienne, co zmienne $x_{i,t}$ w równaniu (3.2) albo inne), to przyjmuje ono postać:

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{k=1}^{m} \omega_k s_{k,t} + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \tag{3.21}$$

ogólna specyfikacja równania dla zmienności

Należy przy tym podkreślić, że w powyższej specyfikacji modelu przestaje obowiązywać ograniczenie $\omega > 0$. Zastępuje się je warunkiem:

$$\omega + \sum_{k=1}^{m} \omega_k s_{k,t} > 0 \tag{3.22}$$

dla $t = 1, \ldots, T$.

3.5. Rozkłady błędu stosowane w modelach GARCH

Założenie o normalności rozkładu innowacji ε_t w równaniu (3.7) jest równoważne z tym, że rozkład warunkowy zmiennej y_t jest normalny ze średnią zero i wariancją σ_t^2. Rozkład bezwarunkowy jednak nie jest normalny, gdyż na przykład charakteryzuje się wartością kurtozy większą niż 3. Wśród znanych faktów dotyczących empirycznych własności finansowych szeregów czasowych wymienia się jednak również obserwowaną często podwyższoną kurtozę rozkładów warunkowych. W celu lepszego dopasowania modeli GARCH w takich sytuacjach Bollerslev (1987) zaproponował, jako alternatywny rozkład zmiennej ε_t, standaryzowany rozkład *t* Studenta z ν stopniami swobody ($\nu > 2$ nie musi być liczbą całkowitą). Jest to rozkład symetryczny o zerowej wartości oczekiwanej i jednostkowej wariancji, którego funkcja gęstości dana jest wzorem:

$$g(z) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\sqrt{\pi(\nu-2)}\,\Gamma(\nu/2)} \left(1 + \frac{z^2}{\nu-2}\right)^{\frac{-(\nu+1)}{2}} \tag{3.23}$$

gdzie Γ jest standardową funkcją gamma, tzn. $\Gamma(u) = \int_0^\infty x^{u-1} e^{-x} dx, \; u > 0$, w szczególności $\Gamma(u+1) = u\Gamma(u)$ oraz $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

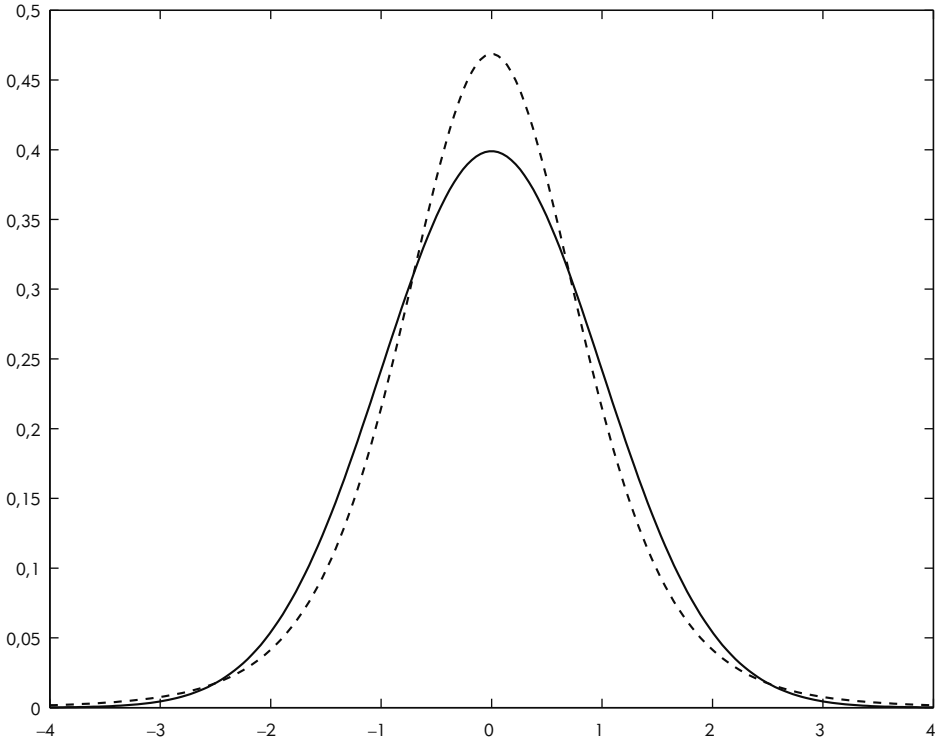
Rozkład ten przy liczbie stopni swobody dążącej do nieskończoności jest zbieżny do standardowego rozkładu normalnego (ilustracja 3.3).

Dla $\nu > 4$, standaryzowany rozkład *t* Studenta ma moment rzędu czwartego równy $\frac{3(\nu-2)}{\nu-4}$. Kurtoza rozkładu warunkowego zmiennej y_t jest więc większa niż w wypadku rozkładu normalnego innowacji ε_t. Liczba stopni swobody ν nie musi być określona z góry, lecz może być estymowana wraz z pozostałymi parametrami modelu.

Spośród innych stosowanych rozkładów innowacji ε_t, do najbardziej popularnych należy wprowadzony przez Nelsona (1991) uogólniony rozkład

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 3.3. Gęstość standardowego rozkładu normalnego (linia ciągła) i standaryzowanego rozkładu *t* Studenta z sześcioma stopniami swobody (linia przerywana)



błędu (*Generalized Error Distribution* – GED). Jego funkcja gęstości wyraża się wzorem:

$$f(z) = \frac{\nu \exp\left(-\frac{1}{2}\cdot\left|z/\lambda\right|^{\nu}\right)}{\lambda \cdot 2^{(\nu+1)/\nu}\Gamma(1/\nu)} \tag{3.24}$$

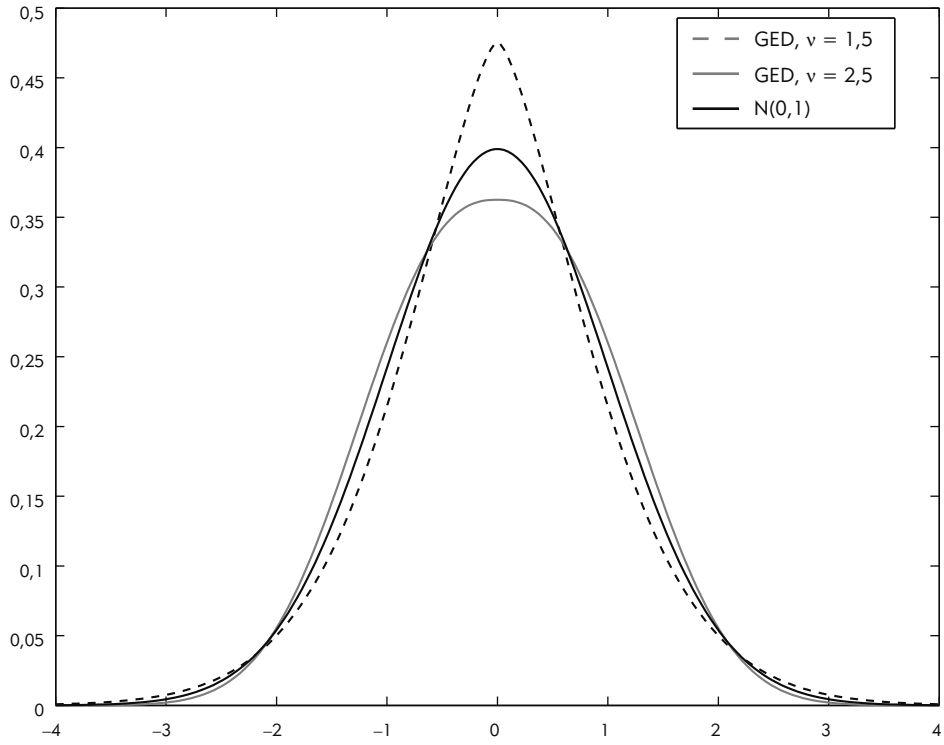
gdzie $\lambda = \left\{\frac{2^{-\frac{2}{\nu}}\Gamma(1/\nu)}{\Gamma(3/\nu)}\right\}^{\frac{1}{2}}$

Dla $\nu = 2$ zachodzi równość ($\lambda = 1$, a gęstość określona wzorem (3.24) jest gęstością standardowego rozkładu normalnego. Przy $\nu < 2$ rozkład GED ma ogony grubsze, a przy $\nu > 2$ cieńsze niż standardowy rozkład normalny (ilustracja 3.4).

Opisane powyżej rozkłady uwzględniają własność grubych ogonów, ale są symetryczne. Empiryczne szeregi finansowe charakteryzują się jednak często skośnością. W celu wychwycenia tego zjawiska, przy modelowaniu stosuje się skośny rozkład *t* Studenta (Fernández, Osiewalski i Steel 1995, Fernández

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 3.4. Gęstość standardowego rozkładu normalnego i rozkładu GED



i Steel 1998, Lambert i Laurent 2001, Hansen 1994). Przy założeniu, że $\nu > 2$ oraz $\xi > 0$, mówimy, iż zmienna Z ma standaryzowany skośny rozkład t Studenta z liczbą stopni swobody v i współczynnikiem asymetrii ξ, $Z \sim \text{SKST}(0, 1, \xi, v)$, jeśli jej gęstość (ilustracja 3.5) wyraża się wzorem:

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{2}{\xi + \xi^{-1}} sg\left(\xi(sz+m)\right), & \text{gdy } z < -\dfrac{m}{s} \\ \dfrac{2}{\xi + \xi^{-1}} sg\left((sz+m)/\xi\right), & \text{gdy } z \geq -\dfrac{m}{s} \end{cases} \tag{3.25}$$

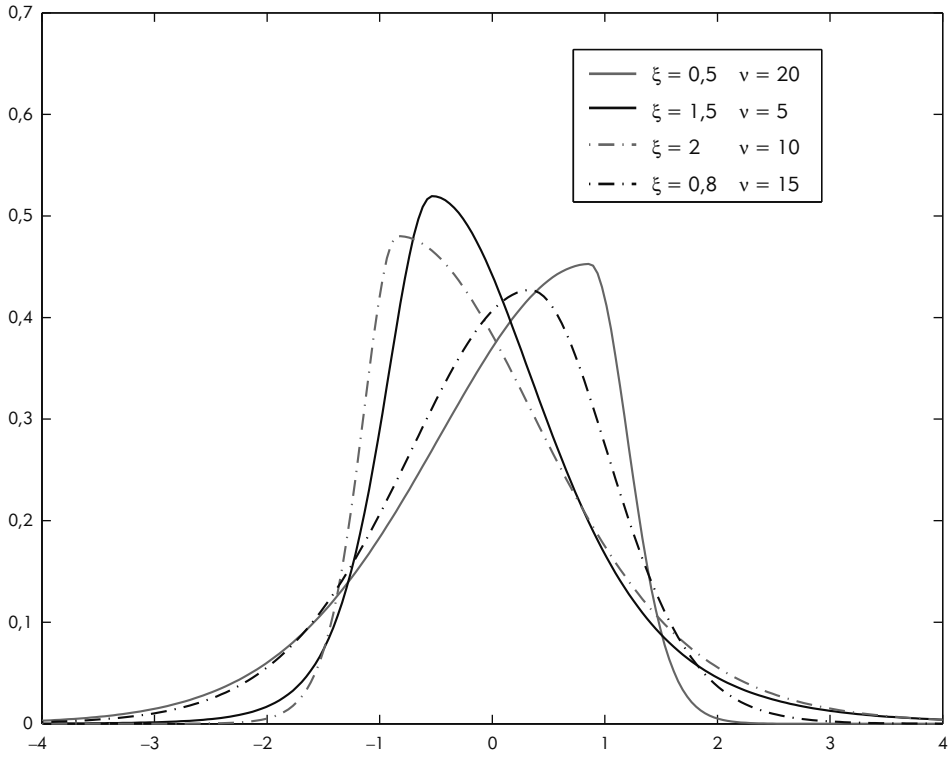
gdzie g jest gęstością standaryzowanego rozkładu t Studenta z v stopniami swobody, określoną wzorem (3.23), a

$$m = \frac{\Gamma\left(\dfrac{\nu-1}{2}\right)\sqrt{\nu-2}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{\nu}{2}\right)}\left(\xi - \xi^{-1}\right) \tag{3.26a}$$

$$s = \sqrt{\xi^2 + \xi^{-2} - 1 - m^2} \tag{3.26b}$$

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 3.5. Gęstość standaryzowanego skośnego rozkładu *t* Studenta



Przez niestandaryzowany skośny rozkład *t* Studenta z *v* stopniami swobody i współczynnikiem asymetrii ξ rozumiemy rozkład zmiennej *X* o gęstości :

$$h(z)=\begin{cases}\dfrac{2}{\xi+\xi^{-1}}\,g(\xi\cdot z), & \text{gdy } z<0\\[2ex] \dfrac{2}{\xi+\xi^{-1}}\,g(z/\xi), & \text{gdy } z\geq 0\end{cases} \tag{3.27}$$

gdzie *g* oznacza gęstość standaryzowanego rozkładu *t* Studenta (3.23).

Dla $v > 2$ wartość oczekiwana zmiennej o gęstości *h* wyraża się wzorem:

$$m=\left(\xi-\frac{1}{\xi}\right)\int_0^\infty 2xg(x)dx=\frac{\Gamma((\nu-1)/2)\sqrt{(\nu-2)}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu/2)}\left(\xi-\frac{1}{\xi}\right) \tag{3.28}$$

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Wariancja jest natomiast równa:

$$s^2 = \left(\int_0^\infty 2x^2 g(x)dx - \left(\int_0^\infty 2xg(x)dx \right)^2 \right) \left(\xi^2 + \frac{1}{\xi^2} \right) + 2 \left(\int_0^\infty 2xg(x)dx \right)^2 - \int_0^\infty 2x^2 g(x)dx = \xi^2 + \xi^{-2} - 1 - m^2 \tag{3.29}$$

Zatem rozkład o gęstości (3.25) ma rzeczywiście zerową średnią i jednostkową wariancję.

Współczynnik asymetrii $\xi > 0$ spełnia równość:

współczynnik asymetrii

$$\frac{P(X \geq 0 \mid \xi)}{P(X < 0 \mid \xi)} = \xi^2$$

gdzie X ma gęstość określoną wzorem (3.27). Dla $\xi = 0$ gęstość standaryzowanego skośnego rozkładu t Studenta z v stopniami swobody ($v > 2$) i współczynnikiem asymetrii ξ staje się gęstością (3.23) określonego wcześniej, standaryzowanego rozkładu t Studenta z v stopniami swobody.

3.6. Testowanie jakości dopasowania modelu

Ocena dopasowania modelu GARCH powinna obejmować badanie, czy reszty standaryzowane $\hat{\varepsilon}_t = \frac{y_t}{\hat{\sigma}_t}$ są generowane przez ciąg niezależnych zmiennych losowych o założonym w modelu rozkładzie (to znaczy, czy spełniają założenie dotyczące innowacji ε_t). Poniżej omawiamy zestaw testów często stosowany w praktyce, choć oczywiście niejedyny możliwy.

3.6.1. Testowanie niezależności reszt standaryzowanych

W praktyce, przy badaniu niezależności reszt standaryzowanych, poprzestaje się, na ogół, na badaniu za pomocą testu Boxa–Pierce'a (lub Ljunga–Boxa), czy zerują się wartości ρ_l ($l \neq 0$) funkcji autokorelacji (ACF) dla reszt standaryzowanych i kwadratów reszt standaryzowanych i – ewentualnie – na zastosowaniu testu Engle'a. W pełni poprawne podejście do tego zagadnienia wymagałoby zastosowania testu własności iid, na przykład wywodzącego się z teorii chaosu testu BDS (Brock i in. 1996, Doman i Doman 2004).

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

3.6.2. Testowanie zależności asymetrycznych

Dla standardowego modelu GARCH(p,q) dodatnie i ujemne innowacje y_{t-i} o tej samej wartości bezwzględnej kreują taką samą wielkość zmienności σ_t^2. Ponadto, innowacje większe co do wartości bezwzględnej generują więcej zmienności w stopniu proporcjonalnym do kwadratu wartości innowacji. Jeśli zatem w rzeczywistości innowacje ujemne przyczyniają się do zwiększania zmienności bardziej niż innowacje dodatnie o tej samej wartości bezwzględnej, to prognozy zmienności z modelu GARCH(p,q) wyznaczane po wystąpieniu innowacji ujemnych, które możemy interpretować jako złe wiadomości, będą niedoszacowane. Jest też odwrotnie: prognozy wyznaczane bezpośrednio po dobrych wiadomościach będą przeszacowane. Na dodatek, jeśli duże co do wartości bezwzględnej innowacje kreują więcej zmienności niż wynika to z zależności kwadratowej, to standardowy model GARCH(p,q) będzie niedoszacowywał prognozowaną zmienność po bezwzględnie dużych innowacjach oraz będzie wyznaczał przeszacowane prognozy zmienności po innowacjach małych w sensie bezwzględnym.

Powyższe spostrzeżenia skłoniły Engle'a i Nga (1993) do zaproponowania trzech testów diagnostycznych modeli zmienności, nazwanych przez autorów, odpowiednio, testem obciążenia znaków (*Sign Bias Test* – SB), testem obciążenia wielkości ujemnych (*Negative Size Bias Test* – NSB) i testem obciążenia wielkości dodatnich (*Positive Size Bias Test* – PSB). Statystyki każdego z tych testów badają, czy dodatnie i ujemne innowacje wywierają różny wpływ na kreowanie zmienności. W najprostszej wersji, statystyki SB, NSB i PSB wyliczane są, odpowiednio, jako t-statystyki dla parametrów b_1, b_2 i b_3 otrzymanych za pomocą klasycznej metody najmniejszych kwadratów z regresji:

testy obciążenia znaków; hipoteza zerowa: brak asymetrii

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = b_0 + b_1 S_{t-1}^- + b_2 S_{t-1}^- y_{t-1} + b_3 S_{t-1}^+ y_{t-1} + \nu_t \tag{3.30}$$

gdzie $\hat{\varepsilon}_t = \dfrac{y_t}{\sigma_t}$ oznacza reszty standaryzowane za pomocą zmienności wyznaczonych z wyestymowanego modelu, S_t^- jest zmienną zero-jedynkową przyjmującą wartość 1, gdy y_t jest ujemne, a $S_t^+ = 1 - S_t^-$.

Jeśli model zmienności jest dobrze wyspecyfikowany, to reszty standaryzowane $\hat{\varepsilon}_t$ powinny być realizacją ciągu iid(0,1).

Przy prawdziwości hipotezy zerowej stwierdzającej prawidłową specyfikację, statystyki SB, NSB i PSB mają asymptotycznie rozkład standardowy normalny.

Można również przeprowadzić test łączny z hipotezą zerową $H_0 : b_1 = b_2 = b_3 = 0$, ze statystyką testową $n \cdot R^2$, gdzie n jest długością szeregu, a R^2 oznacza

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

współczynnik determinacji z regresji (3.30). W tym wypadku statystyka testowa ma asymptotycznie rozkład χ^2 z trzema stopniami swobody.

test SB

Z przedstawionych określeń wynika, że głównym celem testu SB jest badanie zróżnicowania wpływu, wywieranego przez ujemne i dodatnie innowacje na poziom zmienności, którego nie może prognozować testowany model zmienności.

test NSB

Test NSB koncentruje się na różnicach wpływu dużych i małych innowacji ujemnych na zmienność, nieprognozowalnych przez badany model.

test PSB

Z kolei test PSB bada zróżnicowanie wpływu dużych i małych innowacji dodatnich na zmienność, które nie jest wyjaśnione przez model.

Powyższe testy diagnostyczne można również stosować w celu uzyskania dodatkowych statystyk opisujących dynamikę warunkowej heteroskedastyczności innowacji y_t przed dopasowaniem konkretnego modelu zmienności. W tym wypadku zamiast regresji (3.30) stosujemy regresję:

$$e_t^2 = b_0 + b_1 S_{t-1}^- + b_2 S_{t-1}^- y_{t-1} + b_3 S_{t-1}^+ y_{t-1} + v_t \tag{3.31}$$

gdzie $e_t = (r_t - \mu)/\sigma$, przy czym μ i σ oznaczają średnią z próby i odchylenie standardowe z próby dla szeregu zwrotów r_t.

Test SB bada wówczas, czy zmienność reprezentowana przez estymator e_t^2 zależy od znaków innowacji, które ją poprzedzały. Testy NSB i PSB badają natomiast, czy wpływ ujemnych i dodatnich innowacji na zmienność zależy również od ich wielkości.

Różnego rodzaju efekty asymetrii występujące w szeregach zwrotów z instrumentów finansowych należą do najtrudniejszych do wychwycenia. W następnym rozdziale opisujemy kilka różnych typów modeli z rodziny GARCH stanowiących rozszerzenia klasycznego modelu GARCH(p,q) i skonstruowanych między innymi w celu opisania tego typu własności szeregów stóp zwrotu.

3.6.3. Testowanie stabilności parametrów

Zagadnienie stabilności parametrów modelu jest jednym z najistotniejszych przy prognozowaniu w horyzoncie czasowym dłuższym niż kilkudniowy. Podstawowym problemem jest wątpliwość, czy ewentualne zmiany parametrów spowodowane są tym, że model źle opisuje badane zjawisko i wychwytywane zależności są przypadkowe, czy też samo zjawisko w pewnym okresie zmienia się radykalnie, co musi znaleźć odbicie w zmianach parametrów bądź nawet typie modelu.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Testowanie niestabilności parametrów ma długą historię w ekonometrii i statystyce. Parametry są często zredukowanymi formami zmiennych nieobserwowalnych. Chociaż wiara w to, że te zmienne nieobserwowalne są stałe w okresie obserwacji, jest rzeczą sensowną, to jednak w rzeczywistości zdarza się to rzadko. W wielu przypadkach pożądane jest poddanie stałości parametrów testowi specyfikacji.

test Chowa

Najpopularniejszym testem stosowanym do badania, czy występuje zmiana parametrów, jest test Chowa (1960). Procedura tego testu polega na podziale okresu obserwacji pewnym z góry ustalonym punktem i porównaniu, za pomocą odpowiedniej statystyki, mającej – przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej – asymptotyczny rozkład F, oszacowań parametrów otrzymanych dla obu okresów. Zaletą testu Chowa jest jego prostota. Ma on jednak poważną słabość, którą jest konieczność ustalania z góry punktu podziału ciągu obserwacji. Wady tej nie mają testy stabilności opracowane przez Nybloma (1989) i Hansena (1992). Są to bardzo użyteczne testy stabilności parametrów estymowanego modelu, które mogą być wyliczane dla pełnego wektora parametrów, a także dla poszczególnych parametrów.

test Nybloma hipoteza zerowa: stabilność parametrów

Oznaczmy przez l_t t-ty składnik logarytmicznej funkcji wiarygodności estymowanego modelu:

$$l_t = \ln f_t(r_t \mid \mathcal{F}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}) \tag{3.32}$$

jeśli logarytmiczna funkcja wiarygodności dana jest wzorem:

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=1}^{T} \ln f_t(r_t : \mathcal{F}_{t-1}; \boldsymbol{\theta})$$

Niech:

$$c_t = -l_t \tag{3.33}$$

$$\mathbf{q}_t = \frac{\partial c_t}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \left(\frac{\partial c_t}{\partial \theta_1}, \ldots, \frac{\partial c_t}{\partial \theta_p} \right)' \tag{3.34}$$

gdzie ' oznacza transponowanie macierzy ($\mathbf{q}_t$ jest zatem macierzą wymiaru $p \times 1$, czyli wektorem-kolumną wymiaru p). Statystyka Nybloma–Hansena dla testowania stabilności pełnego wektora parametrów $\boldsymbol{\theta}$ ma postać:

$$NH(p) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \mathbf{s}_t' \left(\sum_{t=1}^{T} \mathbf{q}_t \mathbf{q}_t' \right)^{-1} \mathbf{s}_t \tag{3.35}$$

gdzie:

$$\mathbf{s}_t = \sum_{j=1}^{t} \mathbf{q}_j \tag{3.36}$$

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Przy testowaniu stabilności poszczególnych parametrów modelu, statystyki testu Nybloma–Hansena mają postać:

$$NH(1) = \frac{1}{T}\left(\sum_{t=1}^{T} q_{j,t}^2\right)^{-1} \sum_{t=1}^{T} s_{j,t}^2 \tag{3.37}$$

gdzie $j = 1, \ldots, p$, a $q_{j,t}, s_{j,t}$ oznaczają j-te wiersze odpowiednich wektorów-kolumn.

Przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej o stałości parametrów w czasie, statystyki $NH(p)$ i $NH(1)$ mają wysoce niestandardowe rozkłady asymptotyczne, których podstawowe kwantyle zostały podane przez Hansena (1992).

3.6.4. Testowanie zgodności rozkładu

test Pearsona; hipoteza zerowa: zgodność rozkładów

Jednym z testów pozwalających na porównanie rozkładu empirycznego reszt standaryzowanych z teoretycznym rozkładem innowacji jest test Pearsona. W pierwszym kroku reszty są klasyfikowane według ich wielkości i zgodnie z tym dzielone na kategorie zawierające dane z określonego przedziału wielkości. Niech n będzie liczbą obserwacji, r – liczbą rozważanych kategorii, p_i $(i = 1, \ldots, r)$ – obserwowanymi udziałami obserwacji i-tej kategorii, a $p_i^t (i = 1, \ldots, r)$ – teoretycznym prawdopodobieństwem wystąpienia obserwacji z i-tej kategorii. Hipoteza zerowa jest następująca:

$$\mathrm{H}_0: p_1 = p_1^t, p_2 = p_2^t, \ldots, p_r = p_r^t$$

Statystyka testowa jest wyliczana jako:

$$P(g) = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - En_i)^2}{En_i} \tag{3.38}$$

gdzie n_i jest liczbą obserwacji w próbie wpadających do i-tej kategorii, a En_i jest oczekiwaną liczbą obserwacji w tej kategorii, przy założeniu, że hipoteza zerowa jest prawdziwa.

Wartość statystyki Pearsona jest zatem mała, gdy wszystkie obserwowane „udziały" są bliskie oczekiwanym, i jest duża, gdy jeden lub więcej udziałów odbiega od oczekiwanych. Jeśli szereg reszt jest iid, to przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej o zgodności z założonym rozkładem, rozkład asymptotyczny statystyki $P(g)$ ma kwantyle zawarte pomiędzy kwantylami $\chi^2(r - 1)$ i $\chi^2(r - k - 1)$, gdzie k jest liczbą szacowanych parametrów.

Wybór liczby kategorii r nie jest oczywisty. Na przykład dla $T = 2252$ sugeruje się $r = 50$. Przyjmuje się, że liczba komórek powinna rosnąć ze wzrostem liczby obserwacji T według stopy $T^{0,4}$.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

3.7. Ocena jakości prognoz

Jednym z podstawowych wymagań, jakie stawia się modelom zmienności, jest dostarczanie prognoz dobrej jakości. Problem, który pojawia się przy ocenie prognoz zmienności, jest związany z tym, że zmienność jest wielkością nieobserwowalną. W związku z tym jej prognozy trzeba porównywać z wartościami wybranych estymatorów zmienności. Ze względu na definicję zmienności jako wariancji warunkowej stopy zwrotu naturalną miarą zmienności wydawała się wartość kwadratu zaobserwowanej stopy zwrotu. Okazało się jednak, że sprawa jest bardziej skomplikowana. Dokładniej problem ten omówimy w rozdziale 6. Tu przedstawimy jedynie zestaw miar najczęściej stosowanych przy ocenie jakości prognoz średniej warunkowej i zmienności (Welfe 2003).

W poniższych formułach $\hat{y}_{T+i}$ jest prognozą, y_{T+i} wielkością zaobserwowaną, T oznacza liczbę obserwacji w próbie, N jest liczbą prognoz na okres poza próbą, a i – długością horyzontu prognozy.

miary prognoz

W wypadku prognoz zmienności, miarą, do której przywiązuje się największe znaczenie, jest współczynnik R^2 regresji Mincera–Zarnowitza (1969):

$$y_{T+i} = a + b\hat{y}_{T+i} + u_{T+i}$$

gdzie $i = 1, \ldots, N$.

Wysokie wartości tego współczynnika wskazują, że prognozy zmienności dobrze oddają charakter dynamiki przyszłej zmienności, tzn. informują o spodziewanych wzrostach i spadkach zmienności, co ma duże znaczenie dla inwestorów przy podejmowaniu decyzji dotyczących zabezpieczania się przed ryzykiem.

Ponadto stosuje się wiele innych błędów prognoz:

- błąd średniokwadratowy (*mean square error* – MSE):

$$\text{MSE} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(y_{T+i} - \hat{y}_{T+i}\right)^2$$

- medianowy błąd kwadratowy (*median square error* – MedSE):

$$\text{MedSE} = \text{mediana}\left\{\left(y_{T+i} - \hat{y}_{T+i}\right)^2\right\}_{i=1}^{N}$$

- błąd średni (*mean error* – ME):

$$\text{ME} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(y_{T+i} - \hat{y}_{T+i}\right)$$

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

- średni błąd bezwzględny (*mean absolute error* – MAE):

$$\mathrm{MAE} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|y_{T+i} - \hat{y}_{T+i}\right|$$

- pierwiastek błędu średniokwadratowego (*root mean square error* – RMSE):

$$\mathrm{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{N}\left(y_{T+i} - \hat{y}_{T+i}\right)^2}$$

- średni bezwzględny błąd procentowy (*mean absolute percentage error* – MAPE):

$$\mathrm{MAPE} = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{y_{T+i} - \hat{y}_{T+i}}{y_{T+i}}\right|$$

- skorygowany średni bezwzględny błąd procentowy (*adjusted mean absolute percentage error* – AMAPE):

$$\mathrm{AMAPE} = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{y_{T+i} - \hat{y}_{T+i}}{y_{T+i} + \hat{y}_{T+i}}\right|$$

- udział prawidłowych znaków (*percentage of correct signs* – PCS):

$$\mathrm{PCS} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\max\left(\mathrm{sign}\left(y_{T+i}\hat{y}_{T+i}\right),0\right)$$

- współczynnik rozbieżności Theila (*Theil's inequality coefficient* – TIC):

$$\mathrm{TIC} = \frac{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(y_{T+i} - \hat{y}_{T+i}\right)^2}}{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}y_{T+i}^2} + \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\hat{y}_{T+i}^2}}$$

- logarytmiczna funkcja straty (*logarithmic loss function* – LLF):

$$\mathrm{LLF} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\ln\frac{\hat{x}_{T+i}}{x_{T+i}}\right)^2$$

powody stosowania tylu różnych miar jakości prognozy

Tylko niedoświadczony czytelnik mógłby odnieść wrażenie, że przedstawione tu miary błędów powielają informacje dotyczące trafności prognoz. Zróżnicowana konstrukcja tych miar pozwala na wychwycenie różnych aspektów jakości prognoz. Na przykład MSE i MAE i RMSE niosą w pewnym sensie podobną informację, ale w różny sposób reagują na występowanie obserwacji nietypowych. Bliskie siebie wartości tych błędów wskazują, że w szeregu

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

prognoz nie ma pojedynczych prognoz obciążonych dużym błędem, natomiast wartości MSE znacznie większe niż MAE ujawniają obecność błędów o wartościach wyjątkowo dużych.

Duże wartości błędu MAE w zestawieniu z małymi wartościami ME wskazują na podobne udziały prognoz przeszacowanych i niedoszacowanych. Jeśli natomiast oba te błędy są duże co do wartości bezwzględnej, to – w zależności od znaku ME – prognozy są albo systematycznie przeszacowane (znak ujemny), albo niedoszacowane (znak dodatni).

Stosując miary MAPE, AMAPE oraz współczynnik rozbieżności Theila na różne sposoby, odnosimy niedoskonałość prognozy do obserwowanych wartości prognoz i realizacji prognozowanych zmiennych.

Udział prawidłowych znaków ma sens tylko przy prognozowaniu zmiennych, które mogą przyjmować wartości ujemne i dodatnie. Miarę tę stosujemy zatem przy ocenie prognoz średniej, ale nie zmienności.

Z punktu widzenia zastosowań prognoz zmienności w zarządzaniu ryzykiem, duże znaczenie jako narzędzie oceny ich jakości ma logarytmiczna funkcja straty. Jej konstrukcja bowiem powoduje, że niedoszacowanie zmienności jest karane znacznie bardziej niż przeszacowanie.

3.8. Od teorii do praktyki

etapy budowy modelu zmienności

Podsumowując rozważania z tego rozdziału, można powiedzieć, że budowanie modelu zmienności dla szeregu zwrotów powinno obejmować następujące kroki:

1. Należy wyspecyfikować równanie średniej warunkowej, wykorzystując wskazania testów na zależności liniowe w danych i, jeśli jest to niezbędne, należy za pomocą dopasowanego modelu (np. ARMA) oczyścić szereg zwrotów z wszystkich zależności liniowych.
2. Szereg reszt z dopasowanego modelu liniowego należy przetestować na obecność heteroskedastyczności warunkowej typu autoregresyjnego.
3. Jeśli efekty heteroskedastyczności warunkowej typu autoregresyjnego są statystycznie istotne, należy wyspecyfikować model zmienności i przeprowadzić łączną estymację równania średniej i równania zmienności. Większość pakietów obliczeniowych pozwala na jednoczesną estymację średniej warunkowej i wariancji warunkowej. Jest to lepsze rozwiązanie niż procedura dwustopniowa. Modele, w których jednocześnie jest szacowana składowa liniowa w postaci ARMA oraz zmienność za pomocą modeli GARCH, nazywamy modelami ARMA-GARCH.

ARMA-GARCH

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

4. Po estymacji należy ocenić jakość dopasowania modelu (reszty standaryzowane, istotność oszacowań parametrów, kryteria informacyjne). Jeśli jest to konieczne, poprawić dopasowanie.

W badaniach, których wyniki prezentujemy poniżej, do estymacji modeli wykorzystane zostały dane opisane w podrozdziale 1.7, pochodzące z okresu do 31 grudnia 2002 włącznie. Pozostałe dane, od 2 stycznia do 30 maja 2003, posłużyły do wyznaczania i oceny prognoz poza okresem próby.

Zgodnie z opisaną procedurą najpierw przeprowadzony został test Engle'a dla wszystkich szeregów przedstawionych w tabeli 1.12. Rozważana liczba opóźnień wynosi 1, 2, 3, 4, 5, 10, 15. Wartości statystyk testowych zamieszczone zostały w tabeli 3.1.

Tabela 3.1. Wyniki testu Engle'a dla rozważanych szeregów stóp zwrotu. Wyróżnione pola wskazują przypadki, w których hipoteza zerowa o braku efektu ARCH nie została odrzucona na poziomie istotności 0,05

Liczba opóźnień / Szereg	ARCH 1	ARCH 1–2	ARCH 1–3	ARCH 1–4	ARCH 1–5	ARCH 1–10	ARCH 1–15
WIG*d*	216,38	126,65	102,87	80,609	64,712	33,600	22,751
WIG*k*	0,6848	0,3453	0,5614	7,1527	5,7175	3,2556	2,4459
WIG20*d*	300,46	153,23	110,33	84,720	67,852	35,771	24,508
WIG20*k*	2,0642	1,5048	1,5233	5,2654	4,1799	2,4603	1,9482
USDPLN*d*	201,86	116,20	77,704	64,571	54,744	28,108	18,943
USDPLN*k*	52,259	27,708	18,800	20,118	17,200	9,2803	6,7062
Agora	17,961	21,172	26,999	20,834	17,413	11,607	14,224
PKNOrlen	4,4865	2,6950	2,2946	2,1494	2,0299	1,4185	1,1137
WIBOR 3M	78,281	39,211	28,191	23,939	19,134	10,219	7,6736

Przy estymacji modeli GARCH należy przywiązywać dużą wagę do istotności oszacowania parametru ω. Spoglądając na wzór (3.11), możemy łatwo zauważyć, że jeśli dla kowariancyjnie stacjonarnego procesu GARCH przyjmiemy, że ω jest równe zero, to wariancja stopy zwrotu jest także równa zero. Oznacza to, że proces nie jest losowy. Co więc w takim wypadku modelujemy?

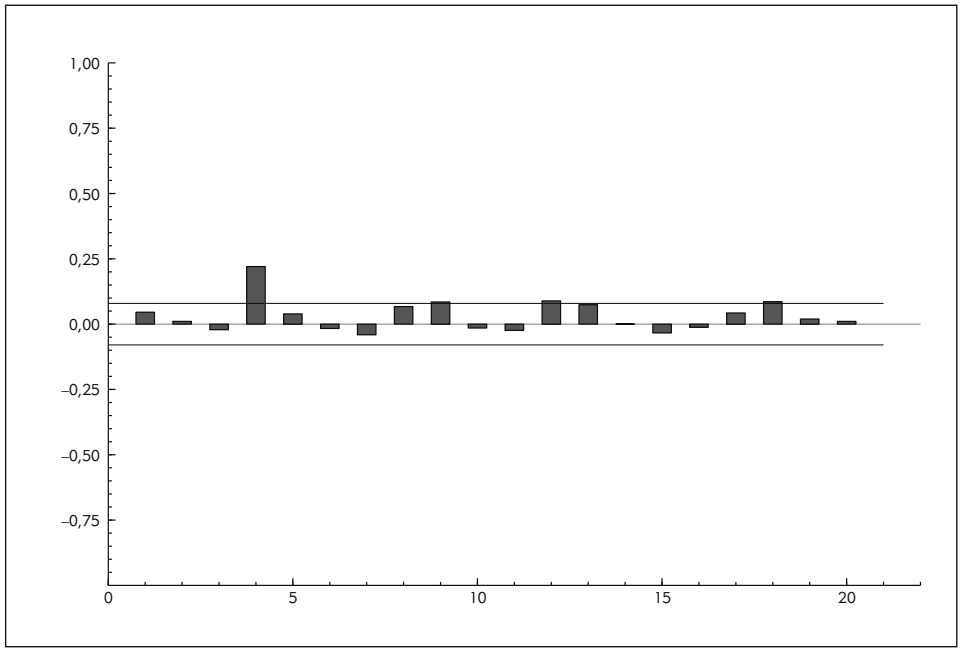
Większość rozważanych szeregów wykazuje silny efekt ARCH już przy opóźnieniu 1. W takiej sytuacji do opisu zmienności na ogół wystarcza model GARCH(1,1). W modelowaniu zmienności w wypadku szeregu PKNOrlen mogą pojawić się trudności. Efekt ARCH jest tu bowiem bardzo słaby. Sytuacja, w której – tak jak tu – efekt ten zupełnie zanika przy zwiększaniu liczby opóźnień, występuje rzadko.

Uwagę zwraca fakt, że w wypadku krótkich szeregów stóp zwrotu z indeksów (WIG*k* i WIG20*k*) efekt ARCH pojawia się dopiero przy opóźnieniu 4. Na

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

tym przykładzie możemy zauważyć, jakie znaczenie ma sekwencyjne stosowanie testu przy zwiększającej się liczbie opóźnień. Zastosowanie standardowej procedury (dla 1, 5, 10 opóźnień) nie pozwoliłoby nam na precyzyjne określenie postaci zależności. Dla porównania przyjrzyjmy się przedstawionemu na ilustracji 3.6 wykresowi ACF dla kwadratów szeregu WIG*k*.

Ilustracja 3.6. WIG20K. Oszacowanie ACF dla kwadratów stop zwrotu



W tabelach 3.2 i 3.5 przedstawiamy oszacowania parametrów wybranych modeli.

W całej książce stosujemy następujące oznaczenia. Jeśli rozkład innowacji ε_t z równania (3.7) jest jednym z rozkładów o gęstościach (3.22), (3.23) lub (3.24), to przez DF (*degree of freedom*) oznaczamy oszacowanie parametru stopni swobody v, natomiast AS (*asymmetry*) jest oszacowaną wartością parametru asymetrii $\ln(\xi)$. Puste miejsca w tabeli oznaczają, że odpowiednie parametry nie były uwzględniane w modelu.

parametry DF i AS

Dla szeregu zwrotów indeksu WIG przedstawiamy trzy modele: dwa na podstawie szeregu obserwacji WIG*d* i jeden na podstawie krótkiego szeregu WIG*k* (tabela 3.3).

W wypadku długiego szeregu obserwacji najlepszy okazał się model AR(1)-GARCH(1,1) z rozkładem błędu *t* Studenta. Jest to zgodne z wynikami po-

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

wszechnie spotykanymi w literaturze opisującej dane z odpowiedniego okresu (Osiewalski i in. 2002). Kolejny model różni się od poprzedniego tym, że wprowadzono dodatkowy regresor w równaniu wariancji warunkowej, będący sztuczną zmienną *switch*, która przyjmuje wartość 0 dla obserwacji od 1 do 1350 oraz 1 dla obserwacji od 1351 do 1996 (ilustracja 3.7). Wykresy przedstawione w podrozdziale 1.7 pozwalają przypuszczać, że w dynamice szeregów GPW nastąpiła znaczna zmiana w maju 2000 roku. Po oszacowaniu modelu zmienna okazała istotna, a oszacowanie odpowiadającego jej parametru modelu wykazało wartość ujemną, co wskazuje, że w tym okresie nastąpiło zmniejszenie zmienności indeksu WIG.

Model dla szeregu WIG*k* wskazuje na wyraźną zmianę dynamiki (korelacja między kwadratami zwrotów pojawia się dopiero przy opóźnieniu 4). Jest to zgodne z przedstawionymi wynikami testu Engle'a. Na wykazywaną przez model zależność można patrzeć w ten sposób, że np. zmienność indeksu w piątek zależy od zmienności w miniony poniedziałek. Fakt ten i jeszcze inne przedstawione w dalszej części pracy wyniki wskazują na bardzo zwolnione w rozważanym okresie reakcje rynku na napływające informacje. Rzadko spotykany w praktyce normalny rozkład błędu pozostaje w zgodzie z wynikami przedstawionymi na ilustracji 1.25.

Tabela 3.2. WIG. Oszacowania parametrów modeli ARMA-GARCH

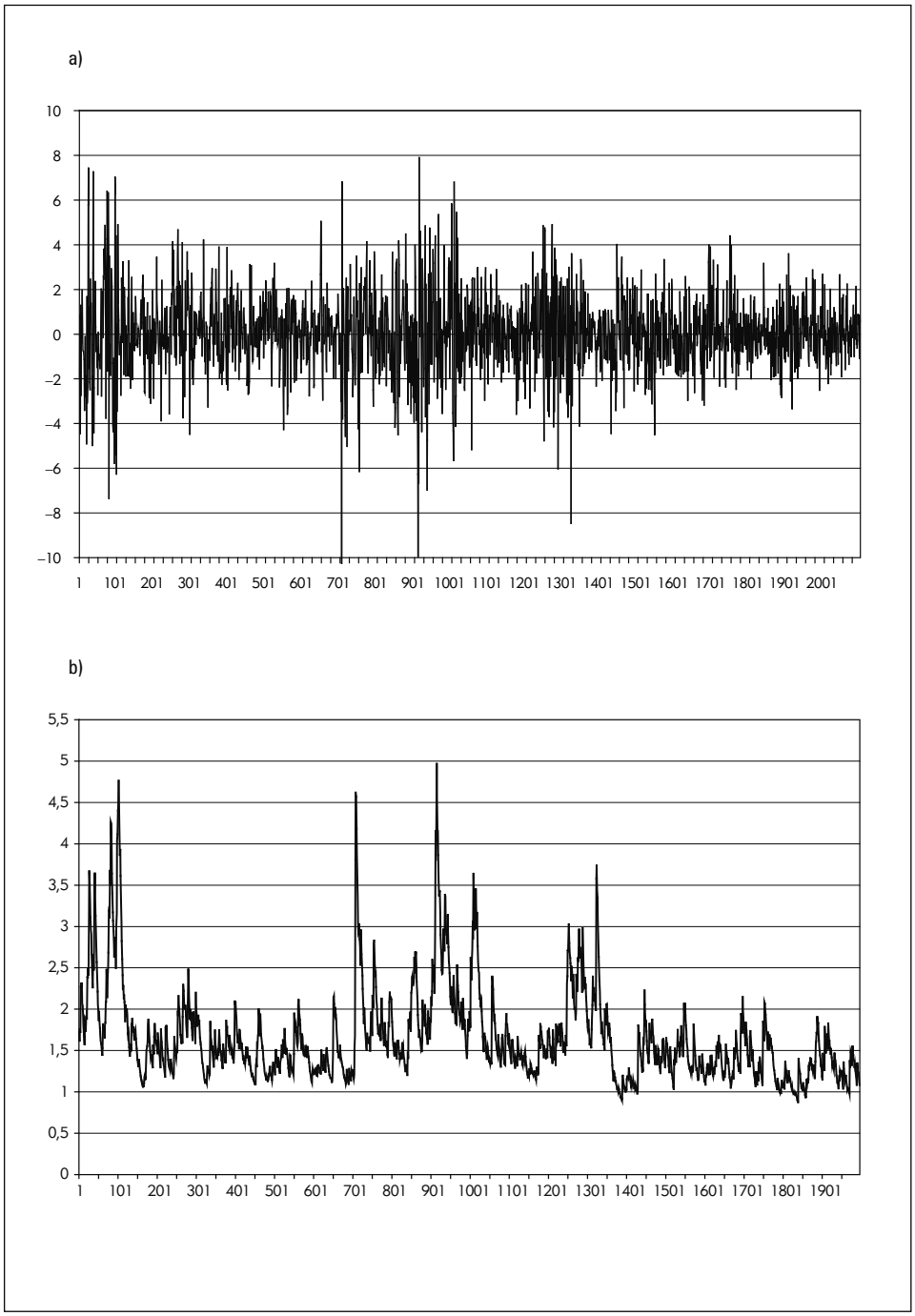
Szereg	**WIG*d***	**WIG*d***	**WIG*k***
Model	**AR-GARCH(1,1)**	**AR-GARCH(1,1)+*switch***	**GARCH(0,4)**
Rozkład błędu	*t* Studenta	*t* Studenta	normalny
a_0	–	–	0,1345 (0,0470)
a_1	0,1696 (0,0238)	0,1677 (0,0227)	
ω	0,1175 (0,0449)	0,1563 (0,0431)	1,0386 (0,1441)
ω_1	–	–0,0496 (0,0270)	–
α_1	0,1257 (0,0259)	0,1251 (0,0203)	–
α_4	–	–	0,1279(0,0486)
β_0	0,8372 (0,0356)	0,8291 (0,0270)	–
DF	8,0769 (1,3754)	8,2140 (1,4496)	–

Tabela 3.3. WIG. Statystyki opisowe reszt standaryzowanych z dopasowanych modeli GARCH

Model	**AR-GARCH(1,1)**	**AR-GARCH(1,1) + *switch***	**GARCH(0,3)**
Średnia	0,0103	0,0083	–0,0056
Odchylenie standardowe	1,0008	1,0002	1,0009
Skośność	–0,1220	–0,1016	0,3102
Kurtoza	4,3817	4,3139	3,6417

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 3.7. Zwroty indeksu WIG (a) i zmienność indeksu WIG (b) (dla szeregu WIG*d*) wyestymowana za pomocą modelu AR(1)-GARCH(1,1) z dodatkową zmienną objaśniającą *switch*. Okresy dużych wahań stóp zwrotu pokrywają się z wysokimi wartościami oszacowań zmienności



Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Dokonajmy teraz oceny jakości oszacowań modeli. Tabela 3.3 przedstawia statystyki opisowe reszt standaryzowanych z oszacowanych modeli. Średnie są bliskie zera, a odchylenia standardowe bliskie 1. Jedyne, co może budzić niepokój, to współczynnik skośności. W tabeli 3.4 prezentujemy syntetycznie wyniki testów przeprowadzonych na resztach standaryzowanych.

Tabela 3.4. Wyniki testów na resztach standaryzowanych

Model	AR-GARCH(1,1)	AR-GARCH(1,1) + *switch*	GARCH(0,3)
statystyka Q (Boxa–Pierce'a) dla reszt standaryzowanych			
Q(5)	4,13621	3,53669	10,5891
Q(10)	6,98941	6,75221	14,1590
Q(20)	12,1111	12,0878	19,5063
Q(50)	48,9573	49,6522	51,4369
statystyka Q (Boxa–Pierce'a) dla kwadratów reszt standaryzowanych			
Q(5)	4,88451	4,07444	3,31829
Q(10)	8,47595	8,12611	7,88066
Q(20)	18,5658	16,9320	21,1912
Q(50)	51,5613	49,5770	46,1343
statystyka testu Engle'a			
ARCH (1–1)	2,2650	1,5481	1,3347
ARCH (1–2)	1,2063	0,79938	0,72999
ARCH (1–5)	1,0016	0,85137	0,65516
ARCH (1–10)	0,81077	0,78824	0,72634
ARCH (1–20)	0,91986	0,83554	0,98965
inne statystyki			
statystyka Nybloma: wektor parametrów	3,33964 niestabilny	3,55597 niestabilny	1,48421 stabilny
statystyka Nybloma (niestabilne parametry)	niestabilny parametr α_1	niestabilny parametr α_1	wszystkie parametry pojedynczo stabilne
testy obciążenia znaków	odrzucona hipoteza zerowa testu NSB – wartość statystyki: 2,17131, *p*-wartość: 0,03	odrzucona hipoteza zerowa testu NSB – wartość statystyki: 2,17131, *p*-wartość: 0,03	brak efektów asymetrii
test Pearsona	wynik dyskusyjny	rozkład zgodny z założonym	rozkład zgodny z założonym

Z tabeli 3.3 wynika, że wszystkie trzy modele dobrze opisują zależności między stopami zwrotu i pomiędzy ich kwadratami (nie występuje korelacja w szeregach reszt standaryzowanych ani efekt ARCH). Można przyjąć,

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

że rozkład błędu w zasadzie jest zgodny z założonym (może poza modelem AR(1)-GARCH(1,1)). W szeregach reszt z pierwszych dwóch modeli występuje efekt asymetrii , który nie znika przy próbie zastosowania skośnego rozkładu *t* Studenta, a oszacowanie parametru skośności tego rozkładu jest statystycznie nieistotne. Ten efekt spróbujemy wychwycić w następnym rozdziale za pomocą bardziej rozbudowanych modeli.

W tabeli 3.5 prezentujemy wyniki oszacowań modelu dla indeksu WIG20. Są one podobne jak w wypadku indeksu WIG. Uwagę zwraca pojawienie się GED jako rozkładu błędu w wypadku szeregu WIG20*k*. Zamiast oceniać ponownie jakość dopasowania modelu, na ilustracji 3.8 prezentujemy oszacowania zmienności w próbie, a na ilustracji 3.9, wykresy stu czterech prognoz zmienności uzyskanych za pomocą modelu AR(1)-GARCH(1,1). W jednym i drugim wypadku dokonujemy porównań z kwadratami odpowiednich stóp zwrotu. Łatwo zauważyć, że o ile oszacowania w próbie są dość trafne, to jakość prognoz nie jest najlepsza. Potwierdzające to wartości miar jakości prognoz znajdują się w tabeli 3.5. Głębszą dyskusję na temat prognoz zmienności przeprowadzimy w rozdziale 6.

Tabela 3.5. WIG 20. Oszacowania parametrów modeli ARMA-GARCH

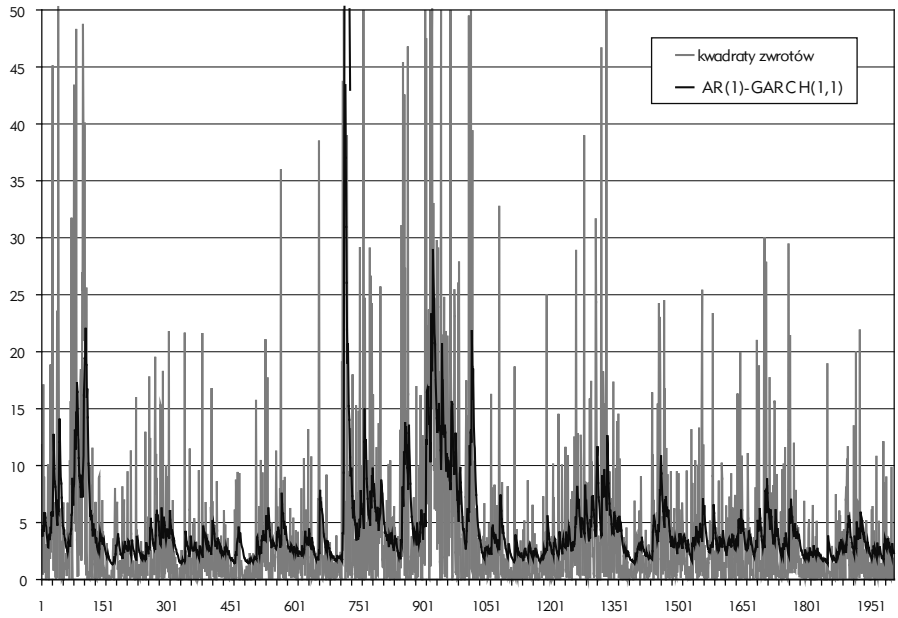
Szereg	**WIG20*d***	**WIG20*k***
Model	**AR(1)-GARCH(1,1)**	**GARCH(0,4)**
Rozkład błędu	*t* Studenta	GED
a_1	0,0708 (0,0239)	–
ω_0	0,1834 (0,0641)	2,2293 (0,2287)
α_1	0,1292 (0,0341)	–
α_4	–	0,2368 (0,0858)
β_0	0,8306 (0,0341)	–
DF	8,5573 (1,4204)	1,5764 (0,1424)

Tabela 3.6. WIG20*d*. Miary jakości prognoz uzyskanych za pomocą modelu AR(1)-GARCH(1,1) w odniesieniu do kwadratów stóp zwrotu jako estymatora zmienności

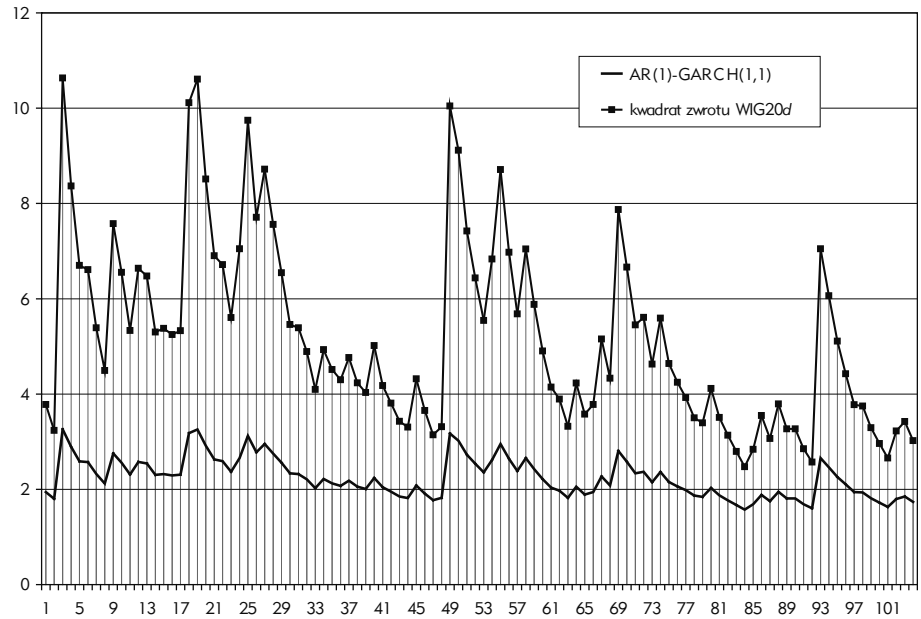
R^2	MSE	MedSE	ME	MAE	RMSE	MAPE	AMAPE	TIC	LLF
0,03	6,284	3,018	–0,7475	1,968	2,507	65,76	0,5972	0,4995	7,844

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 3.8. WIG20*d*. Kwadraty stóp zwrotu oraz oszacowania zmienności w próbie uzyskane za pomocą modelu AR(1)-GARCH(1,1)



Ilustracja 3.9. Prognozy zmienności dla szeregu WIG20*d* uzyskane za pomocą modelu AR(1)-GARCH(1,1) przedstawionego w tabeli 3.2, odniesione do kwadratu stopy zwrotu



Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

3.9. Uwagi

Literatura dotycząca klasycznych modeli GARCH(p,q) jest niezwykle bogata. Oprócz wymienionych wcześniej, wprowadzających te modele artykułów Engle'a (1982) i Bollersleva (1986) należy przynajmniej wspomnieć o artykule przeglądowym Bollersleva, Engle'a i Nelsona (1994). Spośród podręczników, oprócz książki Tsaya (2005), warto polecić także dwie inne: Gourieroux (1997), Gourieroux, Jasiak (2001).

W języku polskim wydano kilka książek, w których można znaleźć różnego typu rozważania na temat modeli GARCH (Brzeszczyński i Kelm 2000, Osiewalski 2001, Doman i Doman 2004, Osińska 2006, Pipień 2006) i bardzo wiele artykułów poświęconych zastosowaniu tych modeli (żeby wymienić tylko wcześniejsze: Osiewalski i Pipień 1999, Brzeszczyński i Welfe 2000, Brzeszczyński i Kelm 2002, Piontek 2000, Bruzda 2003, Fiszeder i Romański 2001, Doman i Doman 2003).

Rozważania dotyczące rozkładów błędu stosowanych w modelach GARCH znaleźć można w wielu pracach. Propozycja zastosowania rozkładu t Studenta została przedstawiona w pracy Bollersleva (1987), a uogólnionego rozkładu błędu GED w artykule Nelsona (1991). Skośny rozkład t Studenta pojawił się po raz pierwszy w pracy Hansena (1994) oraz w wersji zbliżonej do (3.27) w artykule Osiewalskiego i Pipienia (1999a).

W literaturze polskiej dotyczącej modeli GARCH (i ogólnie ekonometrii finansowej) bardzo silny jest nurt bayesowski reprezentowany głównie przez zespół Jacka Osiewalskiego. Czytelnik zainteresowany tematyką modelowania zmienności może rozszerzyć swoją wiedzę poznając książki Osiewalskiego (2001) czy Pipienia (2006), a także inne prace tych autorów. Warto porównać wyniki dotyczące rynku polskiego uzyskane za pomocą metod bayesowskich z tymi, które przedstawiane są w pracach opartych na wnioskowaniu klasycznym. Szczęśliwie dla badaczy i czytelników są one ze sobą zgodne.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

4

Rodzina modeli typu GARCH

Rodzina składająca się z rozmaitych wariantów modeli GARCH jest bardzo liczna. Prezentacji różnego rodzaju rozszerzeń i wariantów modelu GARCH(p,q) poświęcony jest ten i następny rozdział. Popularność modeli typu GARCH wynika z prostoty i intuicyjności ich konstrukcji oraz łatwości, z jaką można je estymować.

4.1. Rozszerzenia modelu GARCH(p,q)

Standardowe modele GARCH(p,q) nie są w stanie wychwycić i opisać wielu własności obserwowanych w empirycznych szeregach stóp zwrotu, przede wszystkim różnego rodzaju efektów asymetrii. Dążenie do bardziej precyzyjnego opisania dynamiki zmienności zaowocowało powstaniem wyjątkowo licznej i różnorodnej rodziny modeli. W tym podrozdziale przedstawiamy jej najbardziej znanych przedstawicieli.

4.1.1. Model GJR-GARCH

Za pomocą standardowych modeli GARCH nie można opisać zjawiska zaobserwowanego po raz pierwszy przez Blacka (1976), polegającego na tym, że okresy podwyższonej zmienności na giełdzie często rozpoczynają się od dużych zwrotów ujemnych, co sugerowałoby, że dodatnie i ujemne zwroty wywierają asymetryczny wpływ na poziom przyszłej zmienności. Według Blacka, wyjaśnienie tego faktu jest następujące: gdy wartość akcji firmy spada, wtedy rośnie stosunek zadłużenia do kapitału, co z kolei prowadzi do podwyższenia zmienności cen akcji. Ponieważ stosunek zadłużenia do kapitału należy do wskaźników dźwigni finansowej, występowanie asymetrycznych oddziaływań zwrotów ujemnych i dodatnich na

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

efekt dźwigni

model GJR-GARCH

poziom zmienności nazywa się powszechnie efektem dźwigni. Wariantem modelu GARCH uwzględniającym powyższą asymetrię jest zaproponowany przez Glostena, Jagannathana i Runkle'a (1993) model GJR-GARCH. Wariancja warunkowa w modelu GJR-GARCH(p,q) określona jest równaniem:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q}\left(\alpha_i y_{t-i}^2 + \gamma_i I\left(y_{t-i} < 0\right) y_{t-i}^2\right) + \sum_{j=1}^{p}\beta_j \sigma_{t-j}^2 \tag{4.1}$$

gdzie $I(\cdot)$ jest funkcją wskaźnikową (tzn. $I(y_{t-1} < 0) = 1$, jeśli $y_{t-1} < 0$ oraz $I(y_{t-1} < 0) = 0$, jeśli $y_{t-1} \geq 0$). Sposób, w jaki GJR-GARCH uwzględnia asymetrię wpływu zwrotów różnych znaków na zmienność, jest lepiej widoczny w równoważnym zapisie równania tego modelu:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q}\left(\alpha_i^- I\left(y_{t-i} \leq 0\right) + \alpha_i^+ I\left(y_{t-i} > 0\right)\right) y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j \sigma_{t-j}^2 \tag{4.2}$$

W tej postaci modelu parametry α_i^- opisują reakcję zmienności na wystąpienie zwrotów ujemnych, a α_i^+ na wystąpienie zwrotów dodatnich. Zależności między parametrami w równaniach (4.1) i (4.2) są następujące:

$$\alpha_i^+ = \alpha_i$$

oraz

$$\alpha_i^- = \alpha_i + \gamma_i$$

Dodatnie oszacowanie parametru γ_i oznacza zatem wzrost zmienności po wystąpieniu zwrotu ujemnego.

Model GJR-GARCH(1,1) opisany równaniami (3.7) i (4.1) jest kowariancyjnie stacjonarny, gdy (Ling, McAleer 2002):

$$\alpha_1 + \beta_1 + \frac{1}{2}\gamma_1 < 1 \tag{4.3}$$

Jeśli $\varepsilon_t \sim N(0,1)$, to moment czwartego rzędu zmiennej y_t istnieje, gdy:

$$\beta_1^2 + 2\beta_1\alpha_1 + 3\alpha_1^2 + \beta_1\gamma_1 + 3\alpha_1\gamma_1 + \frac{3}{2}\gamma_1^2 < 1 \tag{4.4}$$

Dla $\gamma_i = 0$ otrzymujemy warunek (3.20) obowiązujący dla modelu GARCH(1,1).

Ponieważ zmienność σ_t^2 opisana równaniem (4.1) nie zależy w sposób afiniczny od swoich opóźnionych wartości i od opóźnionych wartości y_t^2, więc jej prognoza nie wyraża się w tak prosty sposób, jak w wypadku standardowego modelu GARCH(p,q). Oznaczmy $S_t^- = I(y_t < 0)$. Odpowiedni wzór na prognozę l dni naprzód ma postać:

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

$$\sigma_h^2(l) = \omega + \sum_{i=1}^{q} \left(\alpha_i y_h^2 \ (l-i) + \gamma_i S_{h+l-i|h}^- \ y_h^2(l-i) \right) + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_h^2(l-j) \qquad (4.5)$$

gdzie $y_h^2(l-i)$ i $\sigma_h^2(l-i)$ określone są tak, jak w (3.12), natomiast:

$$S_{h+l-i|h}^- = E(S_{h+l-i}^- \mid \mathcal{F}_h)$$

Dla $k \geq 1$, $S_{h+k|h}^-$ zależy od wybranego rozkładu innowacji ε_t. Jeśli rozkład ten jest symetryczny (a zatem w wypadku rozkładów: normalnego, *t* Studenta i GED), to prawdopodobieństwo, że ε_t jest ujemne, wynosi $\frac{1}{2}$, a więc $S_{h+k|h}^- = \frac{1}{2}$. Jeśli natomiast zmienna ε_t ma standaryzowany skośny rozkład *t* Studenta o *v* stopniach swobody, ze współczynnikiem asymetrii ξ, to $S_{h+k|h}^-$ zależy od ξ oraz *v*.

Stosowane są również inne warianty modelu GJR. Na przykład w programie TSM Davidsona postać modelu GARCH, uwzględniającego asymetryczne oddziaływanie zaburzeń dodatnich i ujemnych, jest następująca:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i (1 + \mu \ I(y_{t-i} < 0)) y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \qquad (4.6)$$

4.1.2. Model APARCH

Model GJR jest szczególnym przypadkiem modelu APARCH (*Asymmetric Power ARCH*) wprowadzonego przez Dinga, Grangera i Engle'a (Ding i in. 1993). Model APARCH(*p*,*q*) określony jest równaniami (3.4) oraz:

specyfikacja modelu APARCH

$$\sigma_t^\delta = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \left(|y_{t-i}| - \gamma_i y_{t-i} \right)^\delta + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^\delta \qquad (4.7)$$

gdzie $\delta > 0$, $-1 < \gamma_i < 1$, $i = 1, \ldots, q$.

Dodatkową zaletą modelu APARCH, oprócz obecności współczynników asymetrii, jest możliwość dopasowania wykładnika δ takiego, że przy pewnych dodatkowych założeniach istnieje bezwarunkowy moment rzędu δ dla procesu σ_t. Model APARCH(*p*,*q*) obejmuje jako szczególne przypadki siedem innych rozszerzeń modelu ARCH:

1) standardowy model ARCH (Engle 1982), gdy $\delta = 2$, $\gamma_i = 0$, $\beta_j = 0$ ($j = 1, \ldots, p$);
2) standardowy model GARCH (Bollerslev 1986), $\delta = 2$, $\gamma_i = 0$ ($i = 1, \ldots, p$);
3) model TS-GARCH (Taylor 1986, Schwert 1990), $\delta = 1$, $\gamma_i = 0$ ($i = 1, \ldots, p$);
4) model GJR-GARCH (Glosten i in. 1993), gdy $\delta = 2$;
5) model TARCH (Zakoian 1994), gdy $\delta = 1$;

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

6) model NARCH (Higgins i Berra 1992), gdy $\gamma_i = 0$, $\beta_j = 0$ ($i = 1, \ldots, p$);
7) model Log-ARCH (Geweke 1986, Pentula 1986), gdy $\delta \to 0$.

Jeśli $\omega > 0$ i $\sum_{i=1}^{q} \alpha_i E\left(|\varepsilon_t| - \gamma_i \varepsilon_t\right)^{\delta} + \sum_{j=1}^{p} \beta_j < 1$, to istnieje stacjonarne rozwiązanie równania (4.7) oraz:

$$E\left(\sigma_t^{\delta}\right) = \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i E\left(|\varepsilon_t| - \gamma_i \varepsilon_t\right)^{\delta} - \sum_{j=1}^{p} \beta_j} \tag{4.8}$$

Jeżeli rozkład zmiennej ε_t jest normalny, to dostajemy:

$$E\left(\left(|\varepsilon_t| - \gamma_i \varepsilon_t\right)^{\delta}\right) = \frac{\left[\left(1+\gamma_i\right)^{\delta} + \left(1-\gamma_i\right)^{\delta}\right] \Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}\right) \sqrt{2^{\delta}}}{2\sqrt{\pi}} \tag{4.9}$$

Natomiast dla standaryzowanego skośnego rozkładu *t* Studenta (3.25) mamy:

$$E\left(\left(|\varepsilon_t| - \gamma_i \varepsilon_t\right)^{\delta}\right) = \left\{\xi^{-(1+\delta)}\left(1+\gamma_i\right)^{\delta} + \xi^{1+\delta}\left(1-\gamma_i\right)^{\delta}\right\} \frac{\Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\delta}{2}\right)\sqrt{(\nu-2)^{1+\delta}}}{\left(\xi+\xi^{-1}\right)\sqrt{\pi(\nu-2)}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \tag{4.10}$$

a dla uogólnionego rozkładu błędu GED (3.24):

$$E\left(\left(|\varepsilon_t| - \gamma_i \varepsilon_t\right)^{\delta}\right) = \frac{\left[\left(1+\gamma_i\right)^{\delta} + \left(1-\gamma_i\right)^{\delta}\right] 2^{\frac{\delta-\nu}{\nu}} \Gamma\left(\frac{\delta+1}{\nu}\right) \lambda^{\delta}}{\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)} \tag{4.11}$$

gdzie $\lambda = \left\{ \frac{2^{-\frac{2}{\nu}} \Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{\nu}\right)} \right\}^{\frac{1}{2}}$

Uwaga: Czasami stosuje się model APARCH(*p*,*q*) w innej postaci (por. Davidson 2008):

$$\sigma_t^{\eta} = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i (1 + \mu\, I(y_{t-i} < 0)) y_{t-i}^{\eta} + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^{\eta} \tag{4.12}$$

gdzie $\eta > 0$.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

4.1.3. Model EGARCH

Historycznie pierwszym wariantem modelu GARCH uwzględniającym efekt asymetrii był GARCH wykładniczy (EGARCH) wprowadzony przez Nelsona (1991). W postaci zaproponowanej przez Bollersleva i Mikkelsena (1996), wariancja warunkowa modelu EGARCH(*p*,*q*) określona jest równaniem:

specyfikacja modelu EGARCH

$$\ln\sigma_t^2 = \omega + \left[1-\beta(L)\right]^{-1}\left[1+\alpha(L)\right]g(\varepsilon_{t-1}) \tag{4.13}$$

gdzie $\alpha(L) \equiv \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \ldots + \alpha_q L^q$, a $1-\beta(L) \equiv 1-\beta_1 L - \beta_2 L^2 - \ldots - \beta_p L^p$ jest wielomianem, którego wszystkie pierwiastki mają moduły większe od 1.

Funkcja *g* uwzględniająca zarówno wielkość, jak i znak innowacji ε_t, wyraża się wzorem:

$$g(\varepsilon_t) = \gamma_1\varepsilon_t + \gamma_2(|\varepsilon_t| - E|\varepsilon_t|) \tag{4.14}$$

W szczególności, odchylenie zmiennej $|\varepsilon_{t-j}|$ od jej wartości oczekiwanej wpływa na zmianę wariancji warunkowej zwrotu w sposób zależny od kierunku i siły tego odchylenia. Wartość oczekiwana $E|\varepsilon_t|$ zależy od przyjętego rozkładu innowacji ε_t. Na ogół parametr γ_2 jest dodatni, czyli im większe odchylenie stopy zwrotu od wartości oczekiwanej, tym większa zmienność.

Dla rozkładu normalnego mamy:

$$E|\varepsilon_t| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tag{4.15}$$

dla standaryzowanego skośnego rozkładu *t* Studenta z *v* stopniami swobody i parametrem asymetrii ξ:

$$E|\varepsilon_t| = \frac{4\xi^2\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)\sqrt{\nu-2}}{\left(\xi+\xi^{-1}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)(\nu-1)\sqrt{\pi}} \tag{4.16}$$

a dla rozkładu GED:

$$E|\varepsilon_t| = \frac{2^{\frac{1}{\nu}}\lambda\,\Gamma\left(\frac{2}{\nu}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)} \tag{4.17}$$

gdzie, tak samo jak we wzorze (3.24):

$$\lambda = \left\{\frac{2^{-\frac{2}{\nu}}\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{\nu}\right)}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

W związku z zastosowaną transformacją logarytmiczną nie ma potrzeby wprowadzania ograniczeń na parametry α_i, β_j, γ_1, γ_2, gwarantujących dodatniość wariancji warunkowej σ_t^2.

4.1.4. Model GARCH-M

W roku 1987 Engle, Lilien i Robins (Engle i in. 1987) przedstawili tzw. model *GARCH in Mean* (GARCH-M), opisujący bezpośrednie zależności pomiędzy zwrotem z instrumentu finansowego a zmieniającym się w czasie ryzykiem mierzonym wariancją warunkową, czyli – w przyjętej tu terminologii – zmiennością. Była to odpowiedź na postulowaną w licznych teoriach finansowych bezpośrednią zależność pomiędzy wielkością zwrotu a ryzykiem. Zaproponowany model włącza do równania średniej warunkowej zmiennej reprezentującej zwrot funkcję, której argumentem jest zmienność. Model GARCH-M(p,q) najczęściej przybiera postać:

GARCH in Mean – wpływ zmienności na stopę zwrotu

$$r_t = m_t + \sum_{i=1}^{n} a_i r_{t-i} + c\sigma_t^2 + y_t \tag{4.18}$$

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t \tag{4.19}$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \tag{4.20}$$

gdzie $m_t + c\sigma_t^2 = E(r_t \mid \mathcal{F}_{t-1})$.

premia za ryzyko

Parametr c, zgodnie z jego interpretacją ekonomiczną, nosi nazwę parametru premii za ryzyko. Czasami w równaniu (4.18) zamiast wariancji warunkowej występuje warunkowe odchylenie standardowe σ_t.

4.2. Estymacja modeli AR-GARCH metodą największej wiarygodności

Do estymowania parametrów modeli GARCH stosuje się techniki oparte na metodzie największej wiarygodności. Przy danych obserwacjach $r_1, \ldots, r_T$ maksymalizuje się funkcję:

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=1}^{T} \ln f_t\left(r_t \mid \mathcal{F}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}\right) \tag{4.21}$$

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

gdzie $\boldsymbol{\theta}$ jest wektorem parametrów modelu,

$$f_t(r_t \mid \mathcal{F}_{t-1};\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sigma_t(\boldsymbol{\theta})} g\left(\frac{r_t - E(r_t \mid \mathcal{F}_{t-1};\boldsymbol{\theta})}{\sigma_t(\boldsymbol{\theta})} \right) \tag{4.22}$$

a g oznacza funkcję gęstości innowacji ε_t z równania (3.7).

Za oszacowanie wektora parametrów $\boldsymbol{\theta}$ przyjmuje się taki wektor $\boldsymbol{\theta}_0$ z przestrzeni parametrów, dla którego funkcja (4.21) osiąga wartość maksymalną.

W wypadku modelu GARCH(p,q) estymację można także łatwo przeprowadzić wykorzystując pakiet Solver programu Excel.

W wielu klasycznych monografiach (Hamilton 1994, Greene 2000) podane są warunki zgodności i asymptotycznej normalności estymatorów parametrów dla przypadku $\varepsilon_t \sim \text{iid}N(0,1)$.

Prawdziwy rozkład reszt standaryzowanych jest jednak ogólnie nieznany. Jeśli przyjmiemy konkretną funkcję gęstości nieodpowiadającą prawdziwemu rozkładowi, to nie mamy gwarancji, że estymatory największej wiarygodności i ich wariancje będą zgodne. Newey i Steigerwald (1997) wykazali, że dla modeli zmienności zgodność zachodzi wtedy, gdy zarówno prawdziwa, jak założona gęstość jest symetryczna. Pokazali również, że estymatory nie są zgodne, jeśli prawdziwa gęstość jest asymetryczna, a założona symetryczna oraz średnia warunkowa nie jest zerowa. W metodzie quasi-największej wiarygodności (*Quasi Maximum Likelihood Estimation* – QMLE) estymuje się parametry modelu GARCH(p,q), maksymalizując logarytmiczną funkcję wiarygodności z innowacjami gaussowskimi (funkcja g w (4.22) jest gęstością standardowego rozkładu normalnego) bez założenia, iż reszty standaryzowane są realizacjami procesu gaussowskiego. Przy pewnych dodatkowych założeniach można w ten sposób otrzymać zgodne estymatory parametrów, jednak zmienia się asymptotyczna macierz kowariancji, w tym sensie, że przy $T \to \infty$ zachodzi zbieżność według dystrybuant:

$$\sqrt{T}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0) \to N\left(\mathbf{0},\ \left(\hat{\mathcal{I}}_{2D} \hat{\mathcal{I}}_{OP}^{-1} \hat{\mathcal{I}}_{2D} \right)^{-1} \right)$$

gdzie:

$$\hat{\mathcal{I}}_{2D} = -\frac{1}{T} \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}\, \partial \boldsymbol{\theta}'} \bigg|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} \tag{4.23}$$

$$\hat{\mathcal{I}}_{OP} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \left[\frac{\partial \ln f_t(r_t \mid \mathcal{F}_{t-1};\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \bigg|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} \right] \left[\frac{\partial \ln f_t(r_t \mid \mathcal{F}_{t-1};\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}'} \bigg|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} \right] \tag{4.24}$$

Zgodności i asymptotycznej normalności estymatorów quasi-największej wiarygodności dla modelu GARCH(1,1) poświęcone są prace (Lee i Hansen

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

1994, Lumsdaine 1996). Uzyskane tam wyniki zostały rozszerzone na model GARCH(p,q) w pracy Berkesa, Horvatha i Kokoszki (2003).

W większości badań empirycznych funkcja gęstości we wzorze (4.22) jest gęstością standardowego rozkładu normalnego lub jedną z gęstości określonych wzorami (3.23), (3.24) lub (3.25). Zależne od wektora parametrów wielkości $E(r_t \mid \mathcal{F}_{t-1}; \boldsymbol{\theta})$, $\sigma_t(\boldsymbol{\theta})$ określone są przez rozważany model średniej warunkowej i wariancji warunkowej. Za nieobserwowalne wartości początkowe zmiennych występujących w zależnościach rekurencyjnych definiujących średnią lub wariancję warunkową przyjmuje się średnią i wariancję tych zmiennych z próby.

4.3. Od teorii do praktyki

Przy modelowaniu zmienności stosujemy ogólne zasady opisane na końcu podrozdziału 2.6. Wyboru modelu GARCH dokonujemy, opierając się na kryteriach informacyjnych, przede wszystkim Schwarza (BIC), ale także Akaike, Shibaty i Hannana–Quinna. Stosujemy zasadę premiowania oszczędności modelu, tzn. jeśli wartości kryteriów informacyjnych nie różnią się lub różnią się niewiele, to wybieramy model prostszy. Ponadto w zasadzie odrzucamy modele z nieistotnymi oszacowaniami parametrów. Trzeba jednak mieć świadomość faktu, że z reguły wartości kryteriów różnią się bardzo mało dla kilku modeli z rozważanej rodziny, a decyzja o wyborze konkretnego modelu zawsze jest nieco obciążona przekonaniami badacza. Dopasowanie modelu badamy, oceniając reszty standaryzowane, $\hat{\varepsilon}_t = \frac{y_t}{\hat{\sigma}_t}$, tak jak to opisano w podrozdziale 3.8. Jeżeli model jest dobrze dopasowany, to reszty standaryzowane powinny być realizacją ścisłego białego szumu o założonym w modelu rozkładzie.

Szacując modele GARCH, trzeba mieć na uwadze fakt, że do jednego szeregu zwrotów można z reguły dopasować kilka różnych modeli. Ma to tę wadę, że uzyskany opis nie jest jednoznaczny, ale również tę zaletę, że można analizować za pomocą jednego typu modeli różne aspekty dynamiki rynku. Duże znaczenie ma zwłaszcza możliwość wprowadzania do modelu różnego typu zmiennych objaśniających.

W podrozdziale 3.7 stwierdziliśmy, że model AR(1)-GARCH(1,1) nie potrafi dostatecznie opisać zachowań asymetrycznych w szeregu stóp zwrotu WIG*d*. Dysponujemy obecnie trzema różnymi modelami, które zostały skonstruowane w celu wychwycenia tego typu efektów. Zobaczmy, jak wyglądają oszacowania tych modeli w wypadku szeregu WIG*d* (tabela 4.1).

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Tabela 4.1. WIG*d*. Oszacowania parametrów modeli uwzględniających efekty asymetrii. Mniejszym pismem oznaczono oszacowania nieistotne. Uwaga: Parametry w modelu EGARCH mimo tych samych oznaczeń mają inne interpretacje (por. (4.13) i (4.14))

Model	**AR(1)-GJR-GARCH(1,1)**	**AR(1)-APARCH(1,1)**	**AR(1)-EGARCH**
Rozkład błędu	***t* Studenta**	***t* Studenta**	***t* Studenta**
a_1	0,1707 (0,0239)	0,1712 (0,0239)	0,1729 (0,0237)
ω	0,1169 (0,469)	0,1069 (0,0427)	26,835 (8,7637)
α_1	0,1051 (0,247)	0,1339 (0,0297)	–0,2113 (0,2009)
β_1	0,8374 (0,0373)	0,8381 (0,0356)	0,9579 (0,0191)
δ	–	1,7213 (0,3786)	–
γ_1	0,0427 (0,0276)	0,0962 (0,0577)	–0,0338 (0,0199)
γ_2	–	–	0,3073 (0,0627)
DF	8,1680 (1,3877)	8,1944 (1,3913)	8,2650 (1,5012)

W wypadku modeli GJR i APARCH parametry opisujące zachowania asymetryczne mają oszacowania nieistotne. W modelu EGARCH nieistotne jest z kolei oszacowanie parametru α_1. Przedstawione w tabeli 4.2 wyniki testów przeprowadzonych na resztach standaryzowanych wykazują jednak, że efekt asymetrii został wychwycony i ogólnie własności reszt z tych modeli wydają się bardziej zgodne z założonymi.

Tabela 4.2. Wyniki testów na resztach standaryzowanych

Model	**AR(1)-GJR-GARCH(1,1)**	**AR(1)-APARCH(1,1)**	**AR(1)-EGARCH**
Statystyka Q (Boxa–Pierce'a) dla reszt standaryzowanych			
Q(5)	4,1730	4,0893	3,9637
Q(10)	7,2626	7,1513	7,1503
Q(20)	12,4555	12,4142	12,8148
Q(50)	48,3384	47,9337	47,3346
Statystyka Q (Boxa–Pierce'a) dla kwadratów reszt standaryzowanych			
Q(5)	3,5125	3,8002	3,5019
Q(10)	7,2397	7,5953	6,4149
Q(20)	17,8731	18,1986	17,3671
Q(50)	51,7379	51,8211	48,8835

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Statystyka testu Engle'a			
ARCH (1–1)	1,3606	1,6078	0,7088
ARCH (1–2)	0,7091	0,8420	0,6490
ARCH (1–5)	0,7314	0,7915	0,7157
ARCH (1–10)	0,7008	0,7346	0,6322
ARCH (1–20)	0,8809	0,8974	0,8423
Statystyka Nybloma			
Statystyka Nybloma dla wektora parametrów	3,6417 niestabilny	3,8550 niestabilny	4,0749 niestabilny
Statystyka Nybloma (niestabilne parametry)	niestabilny parametr a_1	niestabilny parametr a_1	niestabilny parametr a_1
Testy obciążenia znaków			
SB	1,7423	1,8215	1,8633
NSB	1,7176	1,7409	1,4762
PSB	0,1668	0,2382	0,6254
Efekt łączny	4,2753	4,4875	3,8829
Test Pearsona	rozkład zgodny z założonym	rozkład zgodny z założonym	rozkład zgodny z założonym

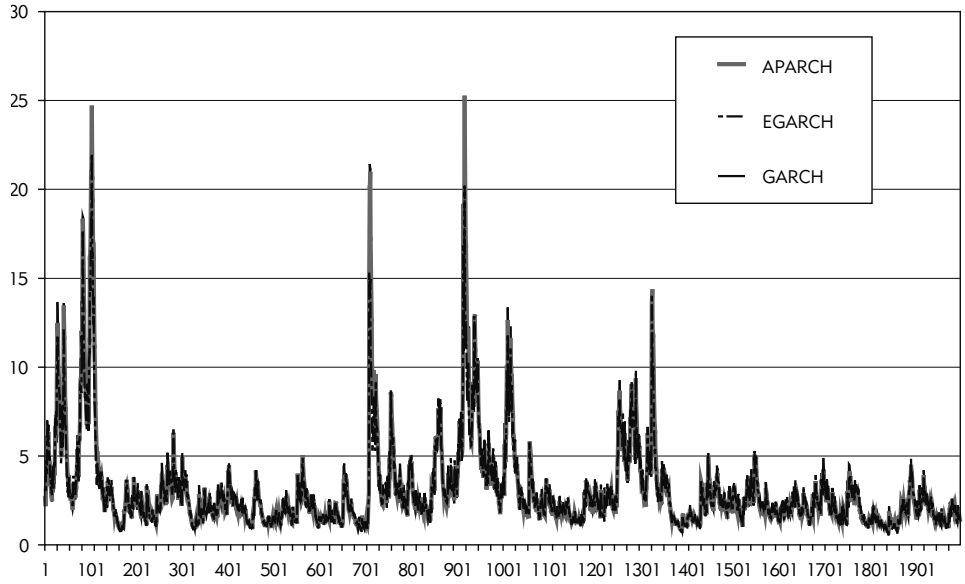
W tabeli 4.3 przedstawione zostały wartości kryteriów informacyjnych wyliczone dla wszystkich modeli, które oszacowaliśmy dla szeregu stóp zwrotu indeksu WIG. Kryteria BIC i Hannana–Quinna wskazują wybór modelu GARCH, a pozostałe dwa kryteria, model GARCH ze zmienną *switch* w równaniu wariancji. W tej sytuacji zdecydowalibyśmy się raczej na wybór modelu GARCH (jak czyni większość badaczy opisujących ten szereg). Zauważmy jeszcze, że oszacowania zmienności w próbie przedstawione na ilustracji 4.1 prawie się nie różnią, choć już prognozy (ilustracja 4.2) wykazują pewne zróżnicowanie.

Tabela 4.3. WIG*d*. Wartości kryteriów informacyjnych dla rozważanych modeli

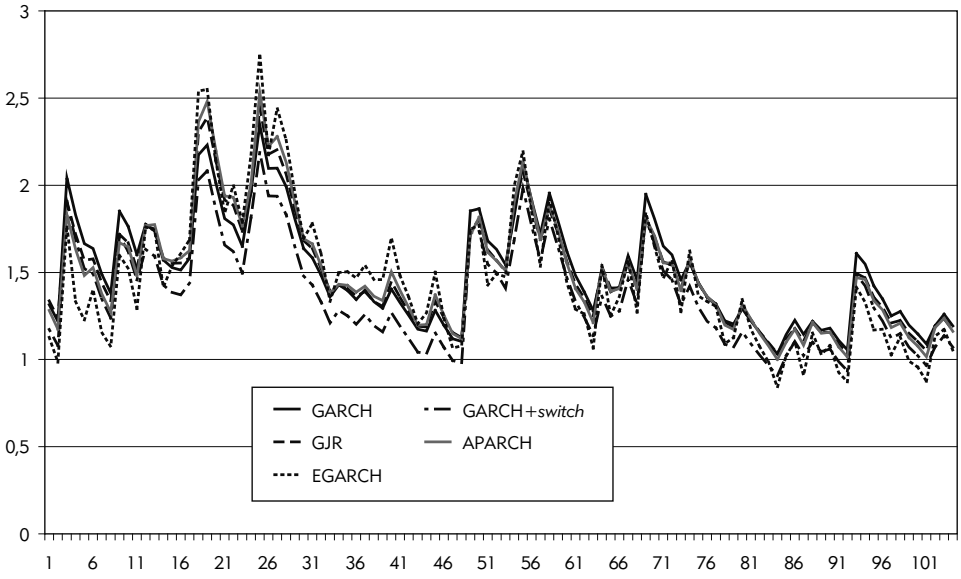
Model	BIC	AIC	Hannana–Quinna	Shibaty
GARCH	3,7561	3,7421	3,7473	3,7421
GARCH+*switch*	3,7582	3,7413	3,7476	3,7413
GJR	3,7587	3,7418	3,7480	3,7418
APARCH	3,7622	3,7426	3,7498	3,7426
EGARCH	3,7627	3,7431	3,7503	3,7431

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 4.1. WIG*d*. Oszacowania zmienności w próbie. Porównanie modeli GARCH, APARCH i EGARCH



Ilustracja 4.2. WIG*d*. Porównanie prognoz zmienności uzyskanych za pomocą różnych modeli z rodziny GARCH



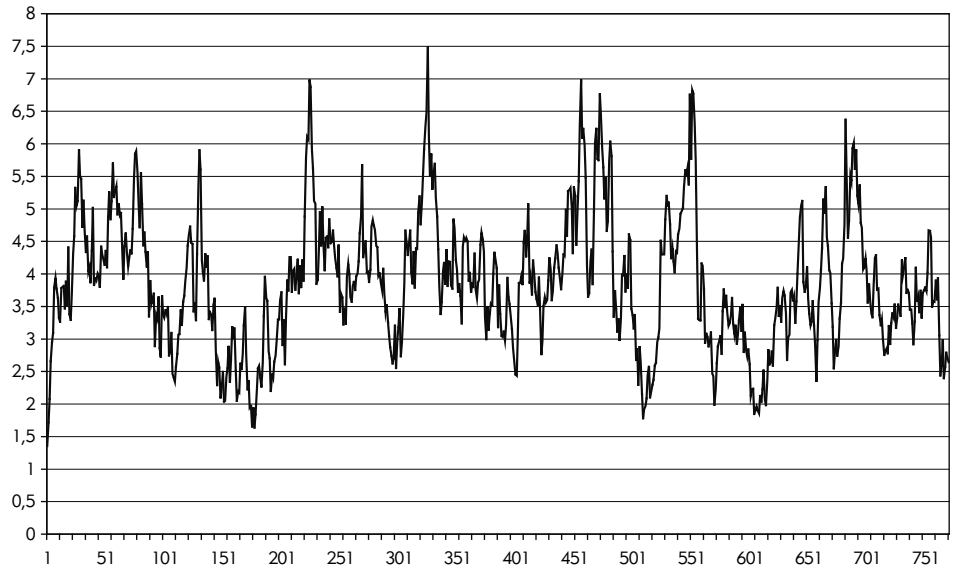
Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Wyniki testu ARCH dla szeregu PKNOrlen były dość nietypowe. Zmienność notowań spółki PKN Orlen opisuje model APARCH(1,1) z parametrem γ_1 równym zero oraz parametrem δ nieco mniejszym od 0,5 (tabela 4.4). Wyjaśnia to nasze wcześniejsze wątpliwości. Zależność nie występuje w kwadratach, ale w potęgach wartości bezwzględnych zwrotów z mniejszym wykładnikiem. Jest to rzadko spotykany, interesujący typ dynamiki. Wykres oszacowań zmienności w próbie przedstawiony jest na ilustracji 4.3. W wypadku Agory najlepiej dopasowanym modelem okazał się GARCH(1,1) ze skośnym rozkładem *t* Studenta (tabela 4.4).

Tabela 4.4. Parametry modeli dopasowanych do szeregów zwrotów notowań spółek Agora oraz PKN Orlen

Szereg	**Agora*d***	**PKNOrlen*d***
Model	**GARCH(1,1)**	**APARCH(1,1)**
Rozkład błędu	skośny *t* Studenta	*t* Studenta
ω	0,2755 (0,0938)	0,1334 (0,0656)
α_1	0,1571 (0,0311)	0,0698 (0,0242)
β_1	0,8114 (0,0326)	0,8462 (0,0571)
δ	–	0,4629 (0,2566)
AS	0,1161 (0,0438)	–
DF	8,3097 (2,6220)	10,5877 (3,2973)

Ilustracja 4.3. PKN Orlen. Oszacowania zmienności w próbie za pomocą modelu APARCH(1,1)



Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

W szeregu USDPLN*d* mogliśmy się spodziewać zmiany strukturalnej ze względu na to, że w rozważanym okresie nastąpiło uwolnienie kursu złotego (przejście od reżimu pełzającego pasma do kursu całkowicie płynnego). Rzeczywiście okazało się, że najlepiej dopasowany jest model ze sztuczną zmienną objaśniającą *switch* przyjmującą wartości 0 do dnia 12 kwietnia 2000 roku i wartości 1 od tego dnia. Trzeba podkreślić, że reszty standaryzowane z modeli bez zmiennej *switch* nie wykazywały zadowalających własności. Dynamikę szeregu USDPLN*f* opisuje się za pomocą modelu GARCH(1,1) ze skośnym rozkładem *t* Studenta.

model GJR w wypadku kursów walutowych

Przyjrzyjmy się oszacowaniom parametrów tych modeli przedstawionym w tabeli 4.5. Zwracają uwagę nieco niższe, niż w wypadku szeregów giełdowych, oszacowania parametru β_1. Oznacza to, że proces zmienności wykazuje w tym wypadku mniejszą persystencję. Oszacowanie parametru γ_1 w modelu GJR jest ujemne, zatem reakcja zmienności na zwrot ujemny jest słabsza niż na zwrot dodatni. Kurs walutowy USD/PLN, który tu badamy, oznacza cenę 1 dolara w złotych, więc zwrot ujemny wskazuje na spadek tej ceny i umocnienie się waluty PLN, a zwrot dodatni, osłabienie PLN. Ujemna wartość oszacowania parametru jest zatem w tym wypadku naturalna.

Tabela 4.5. Modele dopasowane do rozważanych szeregów zwrotów kursu USD/PLN

Szereg	**USDPLN*d***	**USDPLN*k***
Model	**GJR-GARCH(1,1)+*switch***	**GARCH(1,1)**
Rozkład błędu	*t* Studenta	skośny *t* Studenta
a_0	0,0360 (0,0095)	–
ω	0,0199 (0,0070)	0,0621 (0,0347)
ω_1	0,0334 (0,0111)	–
α_1	0,2781 (0,0657)	0,1583 (0,0598)
β_1	0,7227 (0,0634)	0,6953 (0,1265)
γ_1	–0,1639 (0,0511)	–
AS	–	0,1243 (0,0545)
DF	6,0834 (0,8588)	8,2014 (2,5636)

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

4.4. Uwagi

Problem wyboru metody estymacji parametrów przyjętego modelu opisującego proces generujący dany szereg czasowy zwykle wzbudza wiele emocji już na poziomie samego podejścia do określenia, czym w istocie są parametry. Poza ramy tej książki wykracza oczywiście próba rozstrzygania, czy istnieją prawdziwe wartości parametrów, co przyjmuje się w tzw. podejściu klasycznym, czy też parametry są zmiennymi losowymi, co postuluje podejście bayesowskie. Różne metody estymacji, niezależnie od tego, czy wywodzą się z podejścia klasycznego czy bayesowskiego, mają swoich zwolenników i krytyków.

W tej pracy, wychodząc od podejścia klasycznego, stosujemy do estymowania parametrów modeli GARCH techniki oparte na metodzie największej wiarygodności, które – jak nam się wydaje – cieszą się największą popularnością w badaniach empirycznych podobnych do przedstawianych przez nas. Należy jednak podkreślić, że wielu zwolenników ma również bayesowska analiza modeli GARCH. Obszerną bibliografię dotyczącą tych zagadnień można znaleźć w książce Osiewalskiego (2001).

Jak już wspomniano w poprzednim rozdziale, literatura na temat modeli z rodziny GARCH jest bardzo obszerna. Niemal codziennie w internecie pojawiają się nowe artykuły dotyczące tych modeli. Wspomniana już tutaj niejednokrotnie książka Tsaya (2005) również jest w tej dziedzinie wartościowym źródłem podstawowych informacji.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

5

Długa pamięć i persystencja w finansowych szeregach czasowych

Pytanie o występowanie zależności długookresowych w szeregach zwrotów należy do najistotniejszych pytań dotyczących analizy dynamiki rynków finansowych i możliwości prognozowania ich przyszłych zachowań. W wypadku szeregów kowariancyjnie stacjonarnych można nadać opisowi tego zjawiska postać sformalizowaną, używając pojęcia pamięci procesu.

Jak już wspomnieliśmy wcześniej, w literaturze z dziedziny finansów zwykle przyjmuje się, że szeregi zwrotów instrumentów finansowych są kowariancyjnie stacjonarne.

pamięć krótka

O procesie kowariancyjnie stacjonarnym r_t mówi się (Bhansali, Kokoszka 2001), że ma krótką pamięć, jeśli jego funkcja autokowariancji $\gamma_h = \text{cov}(r_t, r_{t-h})$ jest bezwzględnie sumowalna, a funkcja gęstości spektralnej:

$$f(\lambda) := \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) \exp(-ih\lambda)$$

nie znika:

$$\sum_{h=-\infty}^{\infty} |\gamma_h| < \infty, f(\lambda) \neq 0 \tag{5.1}$$

dla $-\pi \leq \lambda \leq \pi$.

Dla procesów kowariancyjnie stacjonarnych warunkiem dostatecznym posiadania krótkiej pamięci jest zanikanie funkcji autokorelacji w tempie wykładniczym. Formalną postać tego ostatniego warunku można zapisać, jako:

$$|\rho_k| \leq Cr^k \tag{5.2}$$

gdzie ρ jest funkcją autokorelacji rozważanego procesu, $C > 0$ i $0 < r < 1$, a $k = 1, 2, \ldots$ Przykładami takich procesów są stacjonarne procesy ARMA(p,q).

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

pamięć długa

Mówimy, że kowariancyjnie stacjonarny proces r_t ma długą pamięć lub, że charakteryzuje się długookresową zależnością, jeśli istnieje liczba d, $0 < d < \frac{1}{2}$, taka że proces x_t zdefiniowany przez zależność:

$$x_t = (1-L)^d r_t \tag{5.3}$$

ma krótką pamięć. Występująca w (5.3) ułamkowa potęga operatora pierwszych różnic, $(1-L)^d$, jest określona wzorem:

$$(1-L)^d = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} d_j L^j \tag{5.4}$$

gdzie $d_1 = d$, a $d_j = \dfrac{j-1-d}{j} d_{j-1}$ dla $j > 1$.

Przy $h \to \infty$ funkcja autokowariancji procesu r_t z długą pamięcią ma postać:

$$\gamma_h \sim \Delta(h)\, h^{-(1-2d)} \tag{5.5}$$

gdzie Δ jest funkcją zmieniającą się powoli w nieskończoności, czyli spełniającą warunek:

$$\frac{\Delta(t \cdot s)}{\Delta(t)} \to 1\text{, dla każdego } s > 0\text{, przy } t \to \infty \tag{5.6}$$

Przykładem takiej funkcji, oprócz funkcji stałej, może być $\Delta(t) = \ln t$.

5.1. Model ARIMA

Rozważmy model ARMA(p,q) określony równaniem (2.45) lub równoważnie równaniem (2.46):

$$(1 - a_1 L - \ldots - a_p L^p) r_t = a_0 + (1 - b_1 L - \ldots - b_q L^q)\, \varepsilon_t$$

Jeśli występujący w tym równaniu wielomian $a(L) = 1 - a_1 L - \ldots - a_p L^p$ ma pierwiastek równy 1, to proces opisany za pomocą tego modelu jest niestacjonarny. Obecność pierwiastka jednostkowego powoduje, że zmienne tworzące proces r_t mają pierwsze (jeśli $a_0 \neq 0$) i drugie momenty zależne od czasu. Inną konsekwencją istnienia pierwiastka jednostkowego jest to, że wpływ przeszłych szoków na szereg czasowy jest trwały (persystencja).

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Najłatwiej można to sprawdzić w przypadku najprostszym ($a(L) \equiv 1 - L$), gdy:

$$r_t = r_{t-1} + \varepsilon_t$$

Szereg tak zdefiniowany nosi nazwę błądzenia losowego (*random walk*). Z równoważnej reprezentacji:

błądzenie losowe

$$r_{h+l} = r_h + \varepsilon_{h+l} + \ldots + \varepsilon_{h+1}$$

wynika natychmiast trwały wpływ przeszłych zaburzeń oraz wzór na prognozę:

$$\hat{r}_h(l) = r_h$$

dla dowolnie długiego horyzontu l.

Zauważmy, że jeśli wielomian $a(L)$ ma dokładnie jeden pierwiastek jednostkowy i w kole jednostkowym nie ma pierwiastków różnych od 1, to może być przedstawiony w postaci:

$$a(L) = a^*(L)(1 - L)$$

gdzie $a^*(L)$ jest wielomianem rzędu $p - 1$, który ma wszystkie pierwiastki poza kołem jednostkowym. Proces (zróżnicowany) $w_t = (1 - L)r_t$ może być wtedy opisany za pomocą kowariancyjnie stacjonarnego modelu ARMA.

Jeśli pierwiastków jednostkowych jest więcej, na przykład n, to uzyskujemy przedstawienie:

$$a(L) = a^*(L)(1 - L)^n$$

co oznacza, że po n-krotnym zróżnicowaniu proces może być opisany za pomocą kowariancyjnie stacjonarnego modelu ARMA. Otrzymane w ten sposób równanie:

model ARIMA

$$a(L)(1 - L)^n = a_0 + b(L) \tag{5.7}$$

opisuje autoregresyjny zintegrowany model średniej ruchomej ARIMA (*Autoregressive Integrated Moving Average*). Zapis ARIMA(p,n,q) oznacza model dla procesu, który po n-krotnym zróżnicowaniu może być opisany za pomocą modelu ARMA(p,q).

Na ilustracjach 5.1 i 5.2 przedstawiono wykresy przykładowych realizacji procesów ARIMA.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 5.1. Przykładowa trajektoria procesu ARIMA(1,1,1) z $a_1 = 0{,}7$ oraz $b_1 = 0{,}5$, $\varepsilon_t \sim N(0,1)$



Ilustracja 5.2. Przykładowa trajektoria procesu ARIMA(1,1,1) z $a_1 = 0{,}7$ oraz $b_1 = -0{,}5$, $\varepsilon_t \sim N(0,1)$



Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

5.2. Model ARFIMA

W wypadku szeregów stacjonarnych opisywanych przez model ARMA(p,q), ze wzrostem opóźnienia, ACF zanika wykładniczo. Dla procesów pierwiastka jednostkowego, ACF z próby wraz z wydłużaniem szeregu zmierza do 1, niezależnie od wybranego opóźnienia (Tsay 2005). Istnieją szeregi czasowe, dla których funkcja autokorelacji ze wzrostem opóźnienia zanika powoli, w tempie wielomianowym. Jak już wspomniano, taką właściwość mają procesy o długiej pamięci. Przykładem może być proces r_t określony równaniem:

$$(1-L)^d r_t = \varepsilon_t \tag{5.8}$$

gdzie $-0{,}5 < d < 0{,}5$, a ε_t jest ścisłym białym szumem.

Przy powyższym ograniczeniu na d, otrzymany proces jest kowariancyjnie stacjonarny i ma reprezentację MA(∞):

$$r_t = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i} \tag{5.9}$$

gdzie $\psi_k = \dfrac{d(1+d)...(k-1+d)}{k!}$

Dla procesu (5.8), ACF ma postać:

$$\rho_k = \frac{d(1+d)\ldots(k-1+d)}{(1-d)(2-d)\ldots(k-d)} \tag{5.10}$$

gdzie $k = 1, 2, \ldots$

W szczególności, gdy $k \to \infty$, $\rho_1 = \dfrac{d}{1-d}$ oraz $\rho_k \approx \dfrac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(d)} k^{2d-1}$, gdzie Γ jest funkcją gamma Eulera (zob. (3.23)), czyli $\rho_k \sim k^{2d-1}$.

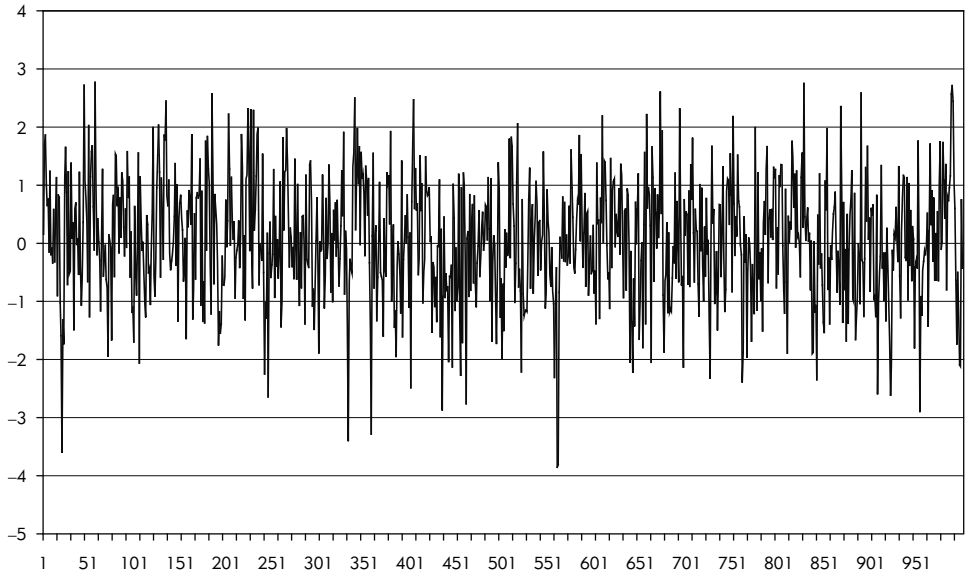
proces ARFIMA

Jeśli szereg $(1-L)^d r_t$ może być opisany za pomocą modelu stacjonarnego i odwracalnego ARMA(p,q), to r_t nazywamy procesem ARFIMA(p,d,q), czyli autoregresyjnym ułamkowo zintegrowanym procesem średniej ruchomej (*Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average*). Procesy takie zostały wprowadzone w 1980 roku przez Grangera i Joyeux (Granger, Joyeux 1980). Proces ARFIMA(p,d,q) jest kowariancyjnie stacjonarny, jeśli $-0{,}5 < d < 0{,}5$, przy czym dla $d > 0$ ma on długą pamięć.

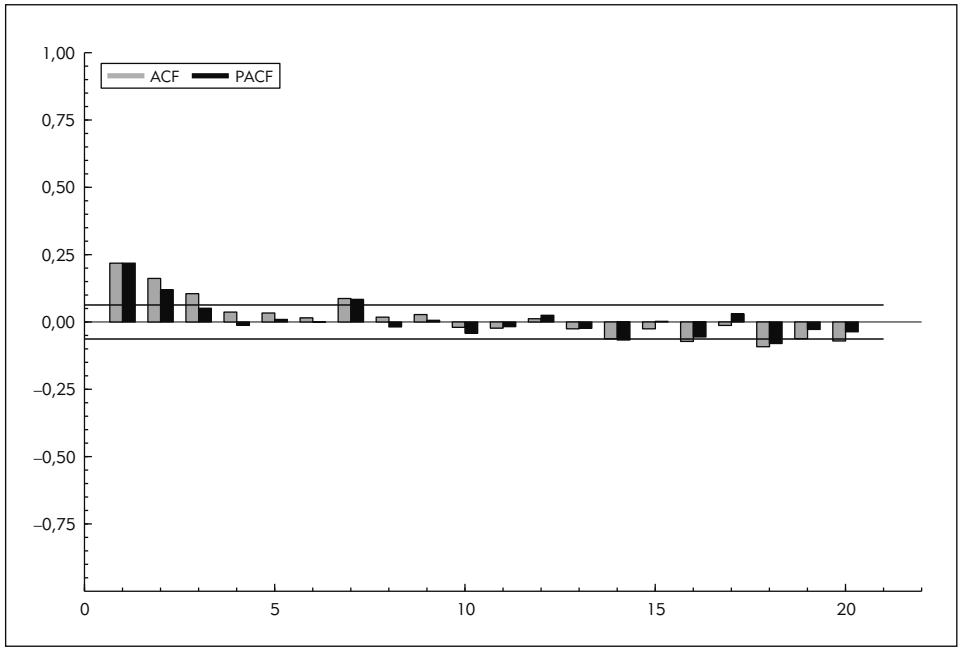
Przykładową realizację procesu ARFIMA(1,d,1) oraz wyliczone dla niej oszacowania funkcji autokorelacji przedstawiono odpowiednio na ilustracjach 5.3 i 5.4.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 5.3. Przykładowa trajektoria procesu ARFIMA(1,1) z $a_1 = 0{,}7$ oraz $b_1 = -0{,}5$, $d = 0{,}3$, $\varepsilon_t \sim N(0,1)$



Ilustracja 5.4. Oszacowania funkcji autokorelacji i funkcji autokorelacji cząstkowej dla trajektorii z ilustracji 5.3

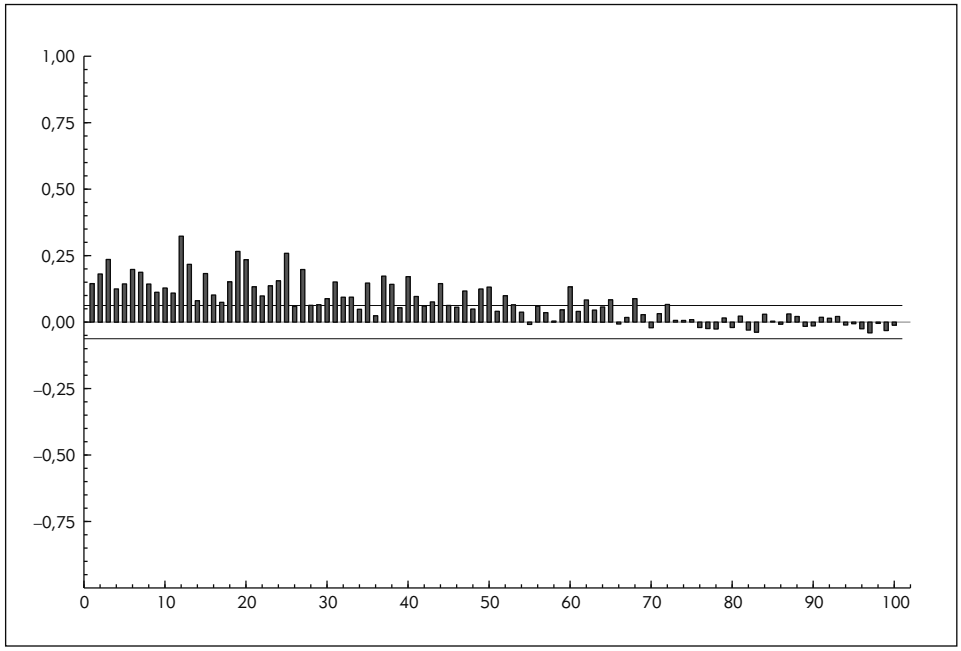


Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

5.3. Długa pamięć i persystencja w szeregach zmienności

Jednym z lepiej znanych faktów empirycznych dotyczących zmienności jest częste występowanie zależności długoterminowych w szeregach zmienności. Prawie zawsze, wolno gasnąca funkcja autokorelacji charakteryzuje szeregi bezwzględnych wartości stóp zwrotu (por. 1.6), a czasami można to zaobserwować w szeregach kwadratów zwrotów (ilustracja 5.5). Z drugiej strony, próby znalezienia wśród dotychczas omawianych modeli z rodziny GARCH takiego, za pomocą którego można by opisać „szaloną" dynamikę zmian stóp procentowych, okazują się nieskuteczne. Dwie kolejne grupy modeli przedstawione w tym podrozdziale pozwalają na częściowe rozwiązanie wymienionych problemów.

Ilustracja 5.5. Agora. Oszacowanie funkcji autokorelacji dla szeregu kwadratów stóp zwrotu. Okres 21.04.1999–30.05.2003



Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

5.3.1. Model IGARCH

W praktycznych zastosowaniach związanych z modelowaniem danych o wysokiej częstotliwości dość często występuje sytuacja, w której suma oszacowań parametrów α_i oraz β_j w standardowym modelu GARCH jest bliska 1, tzn.:

$$\sum_{i=1}^{q}\hat{\alpha}_i + \sum_{j=1}^{p}\hat{\beta}_j \approx 1$$

Zgodnie z terminologią pochodzącą z pracy Engle'a i Bollersleva (1986), model GARCH(p,q), w którym $\sum_{i=1}^{q}\alpha_i + \sum_{j=1}^{p}\beta_j = 1$, nazywa się zintegrowanym (*Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity* – IGARCH). Jeśli szereg γ_l jest generowany przez proces IGARCH, to wariancja bezwarunkowa zmiennej y_t jest nieskończona, a zatem proces y_t nie jest kowariancyjnie stacjonarny. Może być on jednak ściśle stacjonarny. Nelson (1990) wykazał bowiem, że warunkiem wystarczającym ścisłej stacjonarności modelu GARCH(1,1) jest nierówność:

$$E\left(\ln(\alpha_1\varepsilon_t^2 + \beta_1)\right) < 0 \tag{5.11}$$

Z nierówności Jensena (Jakubowski i Sztencel 2001) mamy:

$$E\left(\ln(\alpha_1\varepsilon_t^2 + \beta_1)\right) < \ln\left(E(\alpha_1\varepsilon_t^2 + \beta_1)\right) = \ln(\alpha_1 + \beta_1)$$

Model IGARCH(1,1) jest zatem ściśle stacjonarny.

Przyjmując, że $\alpha_1 + \beta_1 = 1$ we wzorze (3.16) określającym prognozę l dni naprzód w modelu GARCH(1,1), otrzymamy dla modelu IGARCH(1,1) zależność:

$$\sigma_h^2(l) = \omega(h-1) + \sigma_h^2(1) \tag{5.12}$$

IGARCH – persystencja w zmienności

Wynika z niej tak zwana persystencja charakteryzująca model IGARCH, polegająca na trwałej zależności prognozy $\sigma_h^2(l)$ od $\sigma_h^2(1)$. Stanowi to wyraźną różnicę jakościową w stosunku do własności kowariancyjnie stacjonarnego modelu GARCH, gdzie zależność ta zanika w tempie wykładniczym wraz z wydłużaniem horyzontu prognozy l.

W kowariancyjnie stacjonarnym modelu GARCH zarówno autokorelacja zmiennych y_t^2, jak i wpływ aktualnej zmienności na jej prognozowane wartości zanikają w tempie wykładniczym (por. 3.15). Proces IGARCH cechuje natomiast persystencja, czyli trwały wpływ obecnej zmienności na jej prognozy. Podział procesów zmienności za pomocą tych kryteriów na dwie klasy byłby nienaturalnie rygorystyczny. W wypadku procesów liniowych, procesy ARFIMA wypełniają lukę między wykazującymi krótką pamięć procesami ARMA

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

a, zachowującymi trwały wpływ szoków, procesami ARIMA. Podobną rolę wśród modeli zmienności spełniają procesy FIGARCH.

5.3.2. Model FIGARCH

FIGARCH (BBM)

Zintegrowany ułamkowo model GARCH (FIGARCH) został wprowadzony przez Baillie'go, Bollersleva i Mikkelsena (1996) z zamysłem modelowania długookresowych zależności w procesie zmienności. Wariancja warunkowa w modelu FIGARCH(p,d,q) określona jest wzorem:

$$\left(1-\beta(L)\right)\sigma_t^2 = \omega + \left(1-\beta(L)-\phi(L)(1-L)^d\right) y_t^2 \tag{5.13}$$

gdzie:

$\beta(L) \equiv \beta_1 L + \ldots + \beta_p L^p$
$\phi(L) \equiv 1 - \phi_1 L - \ldots - \phi_q L^q$
$0 \le d < 1$

Zauważmy, że dla $d = 0$, po podstawieniu $\phi_i = \beta_i + \alpha_i$ otrzymujemy równanie definiujące standardowy model GARCH(p,q). Jeśli natomiast $\alpha(L) = \alpha_1 L + \ldots + \alpha_q L^q$ oraz zachodzi równość $\alpha(1) + \beta(1) = 1$, to dla $d = 1$ przez podstawienie we wzorze (5.13):

$$\phi(L) = \left(1-\alpha(L)-\beta(L)\right)(1-L)^{-1} \tag{5.14}$$

otrzymujemy równanie definiujące model IGARCH(p,q).

Oryginalna definicja modelu FIGARCH(p,d,q) (5.13) spotkała się z krytyką różnych autorów. Kwestionowane były też uzasadnienia hipotez dotyczących stacjonarności modelu FIGARCH(p,d,q) przedstawione w pracy jego twórców (Baillie i in. 1996). W 1999 roku Chung zaproponował inną specyfikację modelu FIGARCH (Chung 1999). Określona jest ona przez równanie:

FIGARCH (Chung)

$$\phi(L)(1-L)^d(y_t^2-\sigma^2) = \left(1-\beta(L)\right)(y_t^2-\sigma_t^2) \tag{5.15}$$

w którym σ^2 jest parametrem. W równoważnej postaci równania (5.14):

$$\sigma_t^2 = \sigma^2 + \lambda(L)(y_t^2-\sigma^2) \tag{5.16}$$

występuje teoretycznie nieskończone sumowanie $\lambda(L) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i L^i$, które – zgodnie z propozycją Chunga (1999) – w praktycznych obliczeniach obcina się przy $i = t - 1$, przyjmując $y_t^2 - \sigma^2 = 0$ dla $t < 1$.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

5.3.3. Model HYGARCH

Inne podejście do rozwiązania problemów ze stacjonarnością modelu FIGARCH (5.13) zaproponował Davidson (2004). Przedstawił on uogólnioną wersję modelu FIGARCH (5.13), którą nazwał hiperbolicznym modelem GARCH (*Hyperbolic ARCH* – HYGARCH). W modelu HYGARCH równanie dla zmienności przyjmuje postać:

HYGARCH – model zagnieżdżający GARCH, IGARCH oraz FIGARCH (BBM)

$$\left(1-\beta(L)\right)\sigma_t^2 = \omega + \left(1-\beta(L)-\phi(L)\left(1+\alpha\left((1-L)^d-1\right)\right)\right)y_t^2 \qquad (5.17)$$

gdzie $\alpha > 0$ oraz $d > 0$.
Proces opisany za pomocą modelu HYGARCH jest stacjonarny, gdy $\alpha < 1$. Natomiast gdy $\alpha = 1$, model HYGARCH sprowadza się do modelu FIGARCH, a gdy $\alpha = 0$, otrzymujemy klasyczny model GARCH.

5.4. Testowanie stacjonarności i długiej pamięci

W tym podrozdziale przedstawiamy testy stacjonarności oraz wybrane testy statystyczne, które stosowane są do oceniania, czy w szeregach czasowych występują zależności długookresowe, które mogą być wychwycone przez opisane w tym rozdziale modele.

5.4.1. Test Phillipsa–Perrona

test Phillipsa-Perrona; hipoteza zerowa: proces pierwiastka jednostkowego

Test Phillipsa–Perrona (Phillips 1987, Phillips i Perron 1988) jest testem nieparametrycznym, testującym hipotezę zerową, postulującą, że dany szereg jest generowany przez proces:

$$r_t = \alpha + r_{t-1} + u_t \qquad (5.18)$$

gdzie u_t jest procesem o zerowej średniej, spełniającym pewne ograniczenia, dotyczące autozależności i momentów wyższego rzędu (Phillips 1987, Phillips i Perron 1988).

Klasa dopuszczalnych szeregów u_t obejmuje na przykład stacjonarne procesy ARMA(p,q) (Box i Jenkins 1983) z błędami nie tylko gaussowskimi, ale również innymi, spełniającymi pewne bardzo ogólne założenia. Hipoteza zerowa testu Phillipsa–Perrona postuluje więc istnienie pierwiastka jednostkowego w procesie generującym szereg.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

W wypadku drugiego z przedstawianych w tym rozdziale testów, testu KPSS (Kwiatkowski i in 1992), hipotezą zerową jest kowariancyjna stacjonarność względem poziomu lub trendu, natomiast istnienie pierwiastka jednostkowego jest hipotezą alternatywną.

Procedura testu Phillipsa–Perrona polega na estymacji regresji $r_t = \alpha + \rho r_{t-1} + \beta t + u_t$ na podstawie obserwacji $r_1, \ldots, r_T$. Wspomniana hipoteza zerowa jest równoważna z koniunkcją warunków $\rho = 1$ i $\beta = 0$. Przyjęte przez Phillipsa i Perrona (1988) założenia o procesie u_t obejmują w szczególności istnienie granic:

$$\lim_{T\to\infty} T^{-1}\sum_{t=1}^{T} E\left(u_t^2\right) = \sigma_u^2 \tag{5.19}$$

$$\lim_{T\to\infty} T^{-1} E\left(u_1 + u_2 + \cdots + u_T\right)^2 = \sigma^2 \tag{5.20}$$

Wielkość σ^2 określoną równaniem (5.20) nazywa się wariancją długookresową procesu u_t. Statystyka stosowanej przez nas wersji testu Phillipsa–Perrona, będąca skorygowaną t-statystyką dla parametru ρ, ma postać:

wariancja długookresowa procesu u_t

$$Z_{t,T} = \frac{\hat{\sigma}_{u,T}}{\hat{\sigma}_T}\frac{\hat{\rho}_T - 1}{\hat{\sigma}_{\hat{\rho}_T}} - \frac{T(\hat{\sigma}_T^2 - \hat{\sigma}_{u,T}^2)\hat{\sigma}_{\hat{\rho}_T}}{2\hat{\sigma}_T s_T} \tag{5.21}$$

We wzorze 5.21, $\hat{\rho}_T$ jest estymatorem klasycznej metody najmniejszych kwadratów (MNK) parametru ρ, $\hat{\sigma}_{\hat{\rho}_T}$ jest MNK-błędem standardowym dla $\hat{\rho}$, a $s_T^2 = (T-3)^{-1}\sum_{t=1}^{T}\hat{u}_t^2$, gdzie $\hat{u}_t$ są MNK-resztami estymowanej regresji.

Ponadto przy założeniu, że istotnych jest tylko q pierwszych autokowariancji, stosowany jest estymator Neweya–Westa (Newey i West 1987) wielkości σ^2 mający postać:

$$\hat{\sigma}_T^2 = \hat{\sigma}_{u,T}^2 + 2\sum_{j=1}^{q}\left[1 - \frac{j}{q+1}\right]\hat{\gamma}_{j,T} \tag{5.22}$$

gdzie:

$$\hat{\gamma}_{j,T} = T^{-1}\sum_{t=j+1}^{T}\hat{u}_t\hat{u}_{t-j}$$

$$\hat{\sigma}_{u,T}^2 = \hat{\gamma}_{0,T}$$

Zwykle przy obliczaniu statystyki $Z_{t,T}$ przyjmuje się, za Perronem (1988), że q jest równe części całkowitej z wielkości $4\left(\frac{T}{100}\right)^{\frac{1}{4}}$.

Phillips i Perron (1988) wyznaczyli rozkład asymptotyczny statystyki Z_t określonej wzorem (5.21). Dla T dążącego do nieskończoności zachodzi zbieżność według rozkładu:

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

$$Z_{t,T} \longrightarrow Z_t = \frac{V}{\sqrt{Q}} \tag{5.23}$$

gdzie:

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \int_0^1 W(r)dr & \frac{1}{2} \\ \int_0^1 W(r)dr & \int_0^1 [W(r)]^2 dr & \int_0^1 rW(r)dr \\ \frac{1}{2} & \int_0^1 rW(r)dr & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} W(1) \\ \frac{1}{2}\left\{[W(1)]^2 - 1\right\} \\ W(1) - \int_0^1 W(r)dr \end{bmatrix} \tag{5.24}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \int_0^1 W(r)\,dr & \frac{1}{2} \\ \int_0^1 W(r)\,dr & \int_0^1 [W(r)]^2 dr & \int_0^1 rW(r)\,dr \\ \frac{1}{2} & \int_0^1 rW(r)\,dr & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.25}$$

Występujący w rozkładach granicznych proces stochastyczny z czasem ciągłym W jest standardowym ruchem Browna, czyli procesem o niezależnych przyrostach gaussowskich, $W(s) - W(t) \sim N(0, s - t)$, startującym z zera i mającym ciągłe trajektorie (Jakubowski i Sztencel 2001).

Wyznaczone metodą Monte Carlo oszacowania podstawowych kwantyli rozkładu statystyki Phillipsa–Perrona Z_t dla małych prób oraz ich wartości asymptotyczne można znaleźć np. w książkach Fullera (1976) i Hamiltona (1994). Dla wygody czytelnika, odpowiednią tabelę zamieszczamy również w Dodatku.

5.4.2. Test KPSS

Gdy testowanie hipotezy postulującej niestacjonarność nie daje zdecydowanych rozstrzygnięć, rzeczą rozsądną jest przeprowadzenie testu, w którym hipotezą zerową jest stacjonarność. Najbardziej znanym w ekonometrii testem, skonstruowanym w tym celu, jest wspomniany już wyżej test KPSS, zaproponowany przez Kwiatkowskiego, Phillipsa, Schmidta i Shina.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Załóżmy, że proces generujący testowany szereg można przedstawić w postaci:

$$r_t = \alpha + \beta t + z_t + u_t \tag{5.26}$$

gdzie $z_t = z_{t-1} + v_t, z_0 = 0, v_t \sim \text{iid}(0, \sigma_v^2)$, a u_t jest procesem kowariancyjnie stacjonarnym, z długookresową wariancją σ^2 wyrażającą się wzorem (5.20).

Testowane są dwie hipotezy zerowe:

$$1)\ H_\mu : \sigma_v^2 = 0 \ \text{ i } \ \beta = 0$$

$$2)\ H_\tau : \sigma_v^2 = 0$$

test KPSS; hipoteza zerowa: stacjonarność względem poziomu albo trendostacjonarność

Hipoteza H_μ postuluje stacjonarność procesu r_t względem poziomu α, natomiast hipoteza H_τ postuluje trendostacjonarność.

Oznaczmy przez e_i reszty z regresji szeregu r_t na stałą i trend czasowy oraz niech $S_t = \sum_{i=1}^{t} e_i$. Statystyka testu KPSS ma postać:

$$w = \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^{T} \frac{S_t^2}{\hat{\sigma}_T^2} \tag{5.27}$$

Podobnie jak w wypadku testu Phillipsa–Perrona, estymator $\hat{\sigma}_T^2$ wariancji długookresowej σ^2 określony jest wzorem (5.22). Zgodnie z sugestiami zawartymi w pracy (Newey i West 1987), we wzorze (5.22) przyjmuje się tym razem q równe części całkowitej z $3\sqrt{T}/13$.

Przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej H_μ, jeśli $T \to \infty$, to zachodzi zbieżność według rozkładów:

$$w \to \int_0^1 [V(r)]^2 dr \tag{5.28}$$

most Browna

gdzie $V(r)$ jest standardowym mostem Browna (Jakubowski i Sztencel 2001), określonym równością:

$$V(r) = W(r) - rW(1) \tag{5.29}$$

Jeżeli prawdziwa jest hipoteza zerowa H_τ, to dla $T \to \infty$ zachodzi zbieżność według rozkładów:

$$w \to \int_0^1 [V_2(r)]^2 dr \tag{5.30}$$

most Browna drugiego poziomu

przy czym proces $V_2(r)$ występujący w postaci rozkładu granicznego jest tzw. mostem Browna drugiego poziomu. Określony jest on wzorem:

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

$$V_2(r) = W(r) - rW(r) + 6r(1-r)\left(\frac{1}{2}W(1) - \int_0^1 W(s)ds\right) \tag{5.31}$$

Podstawowe kwantyle rozkładów asymptotycznych podajemy (Kwiatkowski i in. 1992) w Dodatku.

5.4.3. Test Lo

test Lo; hipoteza zerowa: brak zależności długookresowych

Idea testu Lo pochodzi od analizy przeskalowanego zasięgu i wykładnika Hursta, stosowanych w teorii chaosu. Statystyka Lo (1991) testująca hipotezę zerową o braku długookresowej zależności w szeregu r_t, $t = 1, \ldots, T$, przeciwko alternatywie stwierdzającej taką zależność, jest określona wzorem:

$$Q_T(q) = \frac{1}{\sqrt{\hat{s}_{T,q}^2 T}}\left[\max_{1\le k\le T}\sum_{j=1}^{k}(r_j - \bar{r}) - \min_{1\le k\le T}\sum_{j=1}^{k}(r_j - \bar{r})\right] \tag{5.32}$$

gdzie $\bar{r} = \frac{1}{T}\sum_{j=1}^{T} r_j$, a $\hat{s}_{T,q}^2$ jest estymatorem wariancji długookresowej procesu r_t, danym wzorem analogicznym do (5.22):

$$\hat{s}_{T,q}^2 = \frac{1}{T}\sum_{j=1}^{T}(r_j - \bar{r})^2 + 2\sum_{j=1}^{q}\left(1 - \frac{j}{q+1}\right)\hat{\gamma}_j \tag{5.33}$$

przy czym:

$$\hat{\gamma}_j = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T-j}(r_i - \bar{r})(r_{i+j} - \bar{r}) \tag{5.34}$$

Jeśli prawdziwa jest hipoteza zerowa o braku zależności długookresowej, to przy q dążącym do nieskończoności w taki sposób, że $q/T \to 0$, gdy $T \to \infty$ i przy pewnych dodatkowych założeniach o procesie r_t, zachodzi zbieżność według rozkładu:

$$Q_T(q) \to U_{R/S} \equiv \max_{0\le t\le 1} V(t) - \min_{0\le t\le 1} V(t) \tag{5.35}$$

gdzie $V(t)$ jest standardowym mostem Browna, określonym równaniem (5.29).

Dystrybuanta $F_{U_{R/S}}$ zmiennej $U_{R/S}$ zdefiniowanej w (5.35) ma postać jawną (Feller 1951):

$$F_{U_{R/S}}(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(1 - 4k^2x^2)e^{-2k^2x^2} \tag{5.36}$$

Podstawowe kwantyle rozkładu zmiennej $U_{R/S}$ podane są w pracy Lo (1991). Zamieściliśmy je również w Dodatku.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

5.4.4. Test GPH

test GPH; hipoteza zerowa: $d = 0$ (nie występuje długa pamięć)

Jednym z najczęściej stosowanych testów na występowanie długiej pamięci w szeregu czasowym jest test GPH (Geweke i Porter–Hudak 1983). Wnioskowanie oparte jest na estymacji semiparametrycznego parametru integracji ułamkowej d jako współczynnika z równania regresji, w którym zmienną objaśnianą jest logarytm periodogramu.

Dla danego ciągu obserwacji r_t, $t = 1,\ldots, T$, estymuje się d z równania regresji:

$$\ln I(\lambda_k) = c + dX_k + \varepsilon_k \tag{5.37}$$

gdzie $k = 1,\ldots, m$ dla $m \le \left[\frac{T}{2}\right]$, gdzie $X_k = -2\ln(2\sin\frac{\lambda_k}{2})$, $\lambda_k = 2\pi k/T$, a periodogram zdefiniowany jest wzorem:

$$I(\lambda) = \frac{1}{2\pi T}\left|\sum_{t=1}^{T} r_r \exp(-i\lambda t)\right|^2$$

5.4.5. Estymator Robinsona parametru długiej pamięci

Oszacowanie semiparametrycznego estymatora parametru długiej pamięci, d (Robinson 1994), może być przydatne jako wartość początkowa przy estymacji modelu ARFIMA (p,d,q). Estymator Robinsona jest wyliczany na podstawie aproksymacji spektrum procesu. Otrzymuje się go jako rozwiązanie problemu minimalizacji:

$$(\hat{C},\hat{d}) = \arg\min_{C,d}\left\{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\left(\ln\left(C\lambda_j^{-2d}\right) + \frac{I(\lambda_j)}{C\lambda_j^{-2d}}\right)\right\} \tag{5.38}$$

gdzie $I(\lambda_j)$ jest wartością periodogramu szeregu r_t, $t = 1,\ldots, T$, dla częstotliwości harmonicznej $\lambda_j = 2\pi j/T$, $j = 1,\ldots, m \le [T/2]$, a szerokość pasma m spełnia warunek: $\frac{1}{m} + \frac{m}{T} \to 0$, przy $T \to \infty$.

5.5. Od teorii do praktyki

W tabeli 5.1 przestawiono wyniki testu GPH dla wybranych szeregów stóp zwrotu. Należy pamiętać, że w wypadku kwadratów stóp zwrotu rezultaty te mogą być traktowane tylko informacyjnie i nie ma prostej zależności pomiędzy oszacowaniem parametru d, na przykład z testu GPH, a parametrem oznaczanym

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

za pomocą tego samego symbolu w modelu FIGARCH. Najbardziej obiecująco wygląda sytuacja Agory. Jednak wyniki testów nie przekładają się na oszacowania modeli. Nie udało się zadowalająco oszacować w wypadku tego szeregu ani modelu ARFIMA dla średniej, ani modelu FIGARCH dla zmienności.

Tabela 5.1. Wyniki testu GPH dla analizowanych szeregów stop zwrotu i kwadratów stop zwrotu. Wyróżnione zostały istotne oszacowania parametru *d*

Szereg	EURPLN*d*	WIG*d*	WIG20*d*	USDPLN*d*	Agora	PKNOrlen	WIBOR 3M
Stopy zwrotu	0,0639	0,0106	0,0347	0,1048	0,1399	-0,0233	0,1251
Kwadraty stóp zwrotu	0,1745	0,2322	0,2744	0,0567	0,3260	0,1388	0,0470

Spośród modeli z rodziny GARCH w zasadzie tylko modele IGARCH nadają się do modelowania dynamiki większości stóp procentowych. W tabeli 5.1 przedstawiono oszacowania parametrów modelu ARMA(1,1)-IGARCH(1,1) dopasowanego do rozważanego przez nas szeregu stóp zmian stopy procentowej WIBOR 3M. Zwraca uwagę bardzo niska liczba stopni swobody rozkładu *t* Studenta wskazująca na bardzo grube ogony rozkładu warunkowego. Wyniki testów na resztach standaryzowanych (których nie prezentujemy tu szczegółowo) wskazują, że model dobrze opisał zależności w średniej i zmienności. Parametry modelu nie są jednak stabilne, a hipoteza o zgodności rozkładu reszt standaryzowanych z rozkładem założonym została odrzucona. Dla porównania, w tej samej tabeli pokazujemy też (niezbyt satysfakcjonujące) wyniki estymacji modelu HYGARCH.

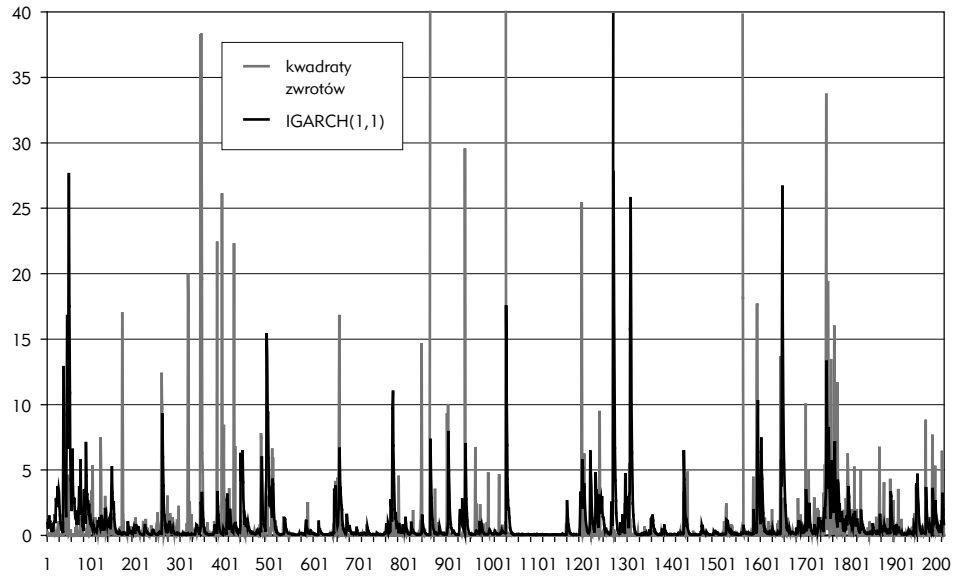
Na ilustracji 5.6 prezentujemy oszacowania zmienności w próbie, a na ilustracji 5.7, prognozy zmienności w odniesieniu do kwadratów stóp zwrotu, uzyskane za pomocą modelu IGARCH.

Tabela 5.2. WIBOR3M. Oszacowania parametrów modelu IGARCH

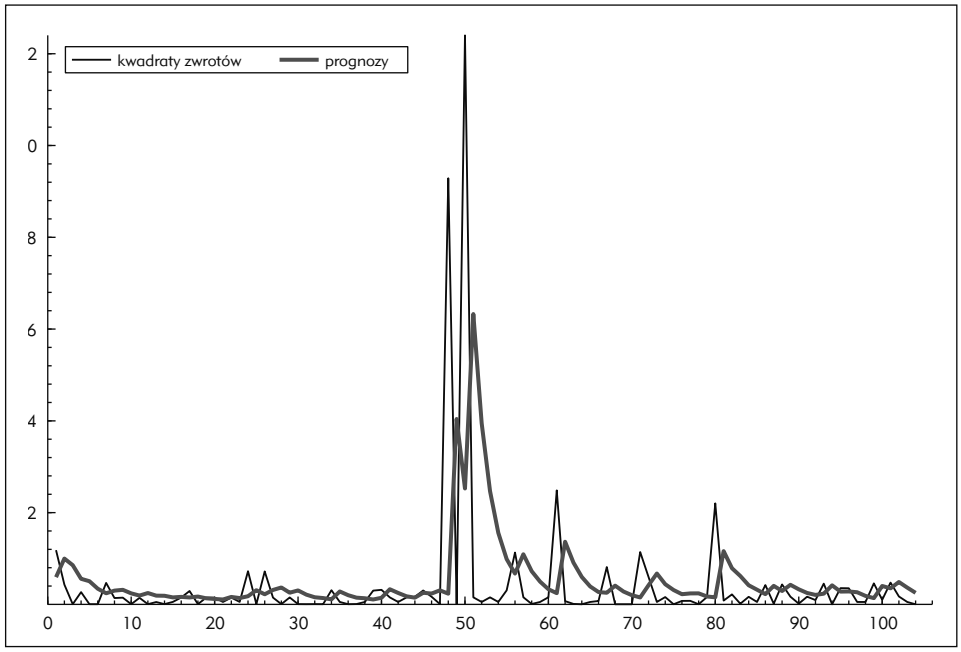
Model	ARMA(1,1)IGARCH(1,1)	HYGARCH(1,1)
Rozkład błędu	*t* Studenta	*t* Studenta
a_0	– 0,0339 (0,0077)	– 0,0239 (0,079)
a_1	0,7685 (90,1021)	–
b_1	– 0,6961 (0,1194)	–
ω	0,0211 (0,0076)	0,0609 (0,1413)
α_1 albo ϕ_1	0,3828 (0,0483)	0,2773 ((0,1435)
d	–	0,8232 (0,1466)
$\ln\alpha$	–	2,7573 (0,9058)
β_1	0,6172	0,5309 (0,0726)
DF	2,7971 (0,0944)	2,0326 (0,0303)

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 5.6. WIBOR3M. Zmienność w próbie wyestymowana za pomocą modelu IGARCH opisanego w tabeli 5.2. Okres 3.01.1995–31.12.2002



Ilustracja 5.7. WIBOR3M. Prognozy zmienności. Okres 2.01.2003–30.05.2003



Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Rozważymy teraz dodatkowo szereg stóp zwrotu kursu EUR/PLN (ilustracja 5.8). Podobnie jak w wypadku kursu USD/PLN, wyróżniamy szeregi EUR/PLN*d* oraz szereg EUR/PLN*k*. W wypadku długiego szeregu stóp zwrotu kursu walutowego EUR/PLN właściwym modelem okazał się AR(1)-FIGARCH(1,*d*,1) (tabela 5.3), co wydaje się wskazywać na efekt długiej pamięci w tym szeregu. Jednak dla szeregu krótkiego EURPLN*k* efekt długiej pamięci zanika. Wydaje się to wskazywać na występowanie w szeregu długim raczej zmian strukturalnych (wywołanych na przykład zmianami reżimu kursowego) niż efektu długiej pamięci.

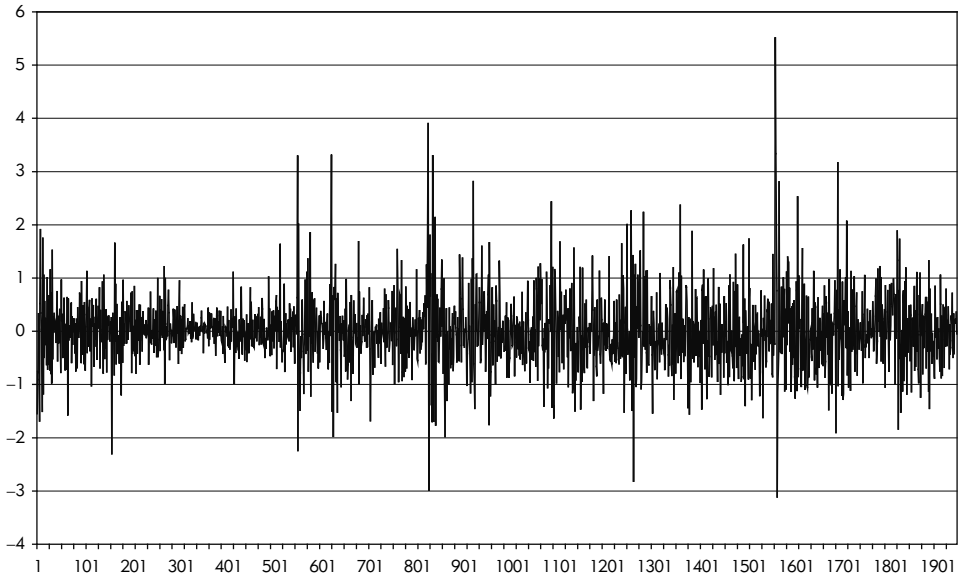
Zjawisko mylenia przez testy i modele tych dwu różnych typów zachowań jest szczegółowo opisywane w literaturze. Wrócimy do tego w uwagach, a także w rozdziale 11. Zmienność kursu EUR/PLN wyestymowano na podstawie modeli dopasowanych do szeregów zwrotów EURPLN*d* oraz EURPLN*k* przedstawiono na ilustracji 5.9.

Tabela 5.3. Modele dopasowane do rozważanych szeregów zwrotów kursu EUR/PLN

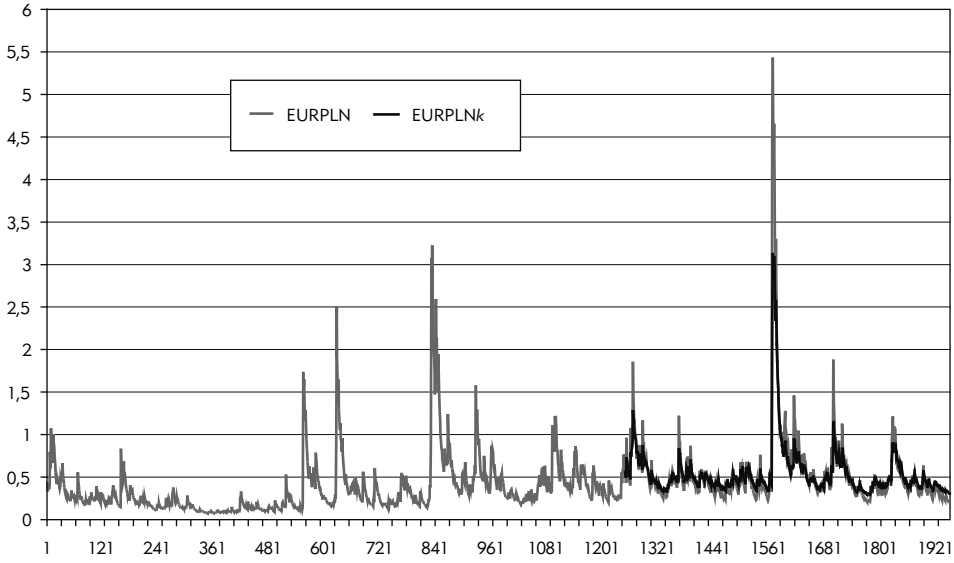
Szereg	**EURPLNd**	**EURPLNk**
Model	**FIGARCH(1,*d*,1)**	**GARCH(1,1)**
Rozkład błędu	skośny *t* Studenta	skośny *t* Studenta
a_1	– 0,1634 (0,0246)	– 0,1278 (0,0386)
ω lub σ^2	0,3007 (0,1237)	0,0294 (0,0165)
d	0,3730 (0,0570)	
α_1 lub ϕ	0,2526 (0,1263)	0,0641 (0,0277)
β_1	0,4880 (0,1299)	0,8790 (0,0493)
AS	0,1202 (0,0305)	0,1520 (0,0528)
DF	6,3544 (0,8236)	7,9164 (2,6777)

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 5.8. Zwroty kursu EUR/PLN. Okres 16.05.1995–6.06.2003



Ilustracja 5.9. Zmienność kursu EUR/PLN wyestymowana na podstawie modeli dopasowanych do szeregów zwrotów EURPLN*d* oraz EURPLN*k*. Okres 16.05.1995–6.06.2003



Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

5.6. Uwagi

Problem istnienia efektu długiej pamięci w danych finansowych należy do najintensywniej analizowanych w literaturze z zakresu analizy szeregów czasowych, a także ekonometrii finansowej.

Czytelników zainteresowanych stanem najnowszych osiągnięć w teorii i zastosowaniach zależności długookresowych odsyłamy do opublikowanych ostatnio dwóch zbiorów artykułów (Kirman i Teyssiere (red.) 2005, Donkhan i in. 2003).

W języku polskim analizie relacji długookresowych poświęcona jest monografia Syczewskiej (1999). Wyniki badań długiej pamięci związane z polskim rynkiem finansowym można znaleźć na przykład w pracach Kwiatkowskiego (1999, 2000), Fiszedera (2005), Piontka (2004) oraz M. Doman (2006, 2007).

Chcielibyśmy również wspomnieć, że w literaturze poświęconej analizie finansowych szeregów czasowych liczne są publikacje podające w wątpliwość twierdzenie, iż powoli znikająca funkcja autokorelacji kwadratów stóp zwrotu świadczy o występowaniu długiej pamięci w szeregach zmienności. Już wczesne prace Diebolda (1986) oraz Lamoureux i Lastrapesa (1990) wskazują, że efekt długiej pamięci może być przeszacowany w sytuacji, gdy w badanym szeregu występują zmiany strukturalne. Nieco później pokazano (Diebold i Inoue 1999), że zjawiska długiej pamięci i występowania zmian strukturalnych mogą być łatwo mylone w badaniach empirycznych. Andersen i Bollerslev (1997) formułują opinię, że długa pamięć w zmienności jest efektem agregacji różnych składowych procesu zmienności. Mikosch i Starica (1999) twierdzą wręcz, że przyczyną wykrywania długiej pamięci w zmienności są zmiany strukturalne w szeregach zwrotów. Tę opinię częściowo podważają wyniki Beine'a i Laurenta (2001).

Więcej informacji na temat modelowania zmian strukturalnych w szeregach stóp zwrotu podajemy w rozdziale 11.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

6

Zmienność cen instrumentów finansowych

Zmienność przenika finanse. To zdanie rozpoczynające fundamentalną pracę Andersena i Bollersleva (1998) wydaje się najbardziej lapidarną odpowiedzią na pytanie, dlaczego badanie zmienności instrumentów finansowych należy do najaktywniej rozwijających się dziedzin badawczych w zakresie finansów i ekonometrii finansowej w ciągu ostatnich kilkunastu lat. Zmienność jest kluczowym parametrem przy wycenie instrumentów pochodnych, optymalizacji portfela i szacowaniu wartości narażonej na ryzyko. Wycenę instrumentów finansowych komplikują dwie charakterystyczne cechy procesu zmienności. Pierwszą z nich jest dobrze udokumentowany fakt ewolucji zmienności cen instrumentów finansowych w czasie oraz jej silna persystencja i tendencja do tworzenia skupisk (Mandelbrot 1963, Engle 1982). Drugą ze wspomnianych cech jest nieobserwowalność zmienności, która wymusza poszukiwanie różnego rodzaju miar zmienności. Można wyróżnić trzy podstawowe podejścia do konstrukcji takich miar: korzystające z modeli zmienności, implikowane przez ceny rynkowe oraz oparte na pojęciu zmienności zrealizowanej, wyliczanej na podstawie zwrotów o wysokiej częstotliwości. Wśród parametrycznych modeli zmienności najpopularniejsze są przedstawione już przez nas uogólnione modele autoregresyjnej heteroskedastyczności warunkowej (GARCH) oraz modele zmienności stochastycznej (*Stochastic Volatility* – SV), o których będziemy mówić w rozdziale 8.

ewolucja zmienności cen instrumentów finansowych

nieobserwowalność zmienności

Zmienność (*volatility*) w odniesieniu do ceny instrumentu finansowego jest miarą niepewności co do przyszłych zmian tej ceny. Pojęcie zmienności obecne jest we wszystkich nowoczesnych teoriach dotyczących finansów i procesów podejmowania decyzji. Powszechność i szerokie stosowanie tego pojęcia nie oznacza jednak, że jest ono rozumiane jednoznacznie.

zmienność

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

6.1. Pojęcie zmienności w ujęciu statycznym i dynamicznym

Z matematycznego punktu widzenia naturalnymi miarami niepewności związanej z przyszłą zmianą ceny są miary rozproszenia zwrotu z rozpatrywanego instrumentu, wokół zwrotu oczekiwanego przez inwestora. Statystyka matematyczna oferuje szereg miar rozproszenia, z których do najpopularniejszych należą wariancja i odchylenie standardowe. Przegląd stosowanych w finansach miar zmienności potwierdza powszechność stosowania wariantów tych właśnie statystyk do estymowania zmienności. Bardziej szczegółowa specyfikacja miar zmienności zależy od przyjmowanych modeli teoretycznych opisujących zwroty z instrumentu finansowego jako procesy stochastyczne.

statyczne podejście do szacowania zmienności: zmienność jako wariancja z próby

Analiza stochastyczna zwrotów może być prowadzona w dwóch ujęciach. Pierwsze z nich, zwane statycznym lub historycznym, jest bardzo popularne, ale niestety często wewnętrznie sprzeczne. Zakłada ono czasami niejawnie, że zwroty historyczne nie zawierają użytecznych informacji prognostycznych, czego praktycznym wyrazem jest wyliczanie pewnych wielkości na podstawie zwrotów przeszłych w taki sposób, jakby były one realizacjami zmiennych niezależnych. Tak wyliczone statystyki wykorzystuje się jednak następnie jako wskaźniki kształtowania się zwrotów w przyszłości, co jest wyrazem przekonania, że przyszłe zwroty są funkcją zwrotów przeszłych. Przy takim podejściu zmienność instrumentu finansowego w momencie t estymowana jest jako:

$$\hat{\sigma}_t^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(r_{t-j} - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_{t-j}\right)^2 \tag{6.1}$$

gdzie n jest ustaloną długością ruchomego okna obserwacji.

Niejawnie zakłada się tutaj, że na odcinku długości n zwroty są niezależne lub co najmniej nieskorelowane i mają jednakowy rozkład.

Podstawą podejścia alternatywnego, dynamicznego, jest przekonanie o możliwości wnioskowania dotyczącego przyszłych zwrotów i ich charakterystyk na podstawie przeszłych cen i opóźnionych wartości innych zmiennych objaśniających, szczególnie w sytuacji występowania zależności nieliniowych między tymi wielkościami. Przykładem takiego typu zależności może być omawiany w rozdziale 3 efekt ARCH polegający na występowaniu autokorelacji w szeregach kwadratów nieskorelowanych zwrotów.

Adekwatnym narzędziem badawczym przy ujęciu dynamicznym są rozkłady warunkowe i momenty warunkowe, takie jak warunkowa wartość oczekiwana

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

i warunkowa wariancja. Są to zmienne losowe mierzalne względem σ-ciał (zbiorów informacji) generowanych przez napływające informacje na temat procesu ceny. W związku z tym rozkłady tych zmiennych mogą ewoluować w czasie, co powoduje, że w każdym momencie t niezbędne jest wyliczenie nowych oszacowań ich parametrów na podstawie przeszłych obserwacji. Rozpatrywanie rozkładów warunkowych jest nieodzowne w sytuacji, gdy mamy podstawy zakładać, że na obecne zwroty w jakimś stopniu wpływają zwroty historyczne oraz że przyszłe zwroty zależą od obecnych i przeszłych w tym sensie, że wartości tych ostatnich mogą być przydatne przy prognozowaniu. Chociaż aproksymacja momentów warunkowych jest trudniejsza niż momentów bezwarunkowych, to – według powszechnego przekonania – prognozy uzyskiwane przy użyciu momentów warunkowych są dokładniejsze.

Przypomnijmy, że gdy rozpatrujemy czas dyskretny, proces stochastyczny ceny instrumentu finansowego jest ciągiem zmiennych losowych określonych na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ wyposażonej w filtrację, czyli ciąg σ-ciał $\mathcal{F}_t$ takich, że zachodzą zawierania $\{\emptyset,\Omega\} = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset ... \subset \mathcal{F}$. O zdarzeniach należących do σ-ciała $\mathcal{F}_t$ zakłada się, iż w momencie t o każdym z nich wiadomo, czy nastąpiła jego realizacja, czy też nie. W związku z tym można je interpretować jako zbiór informacji, które napłynęły do momentu t włącznie, i są dostępne w tym momencie dla inwestora.

Zgodnie z terminologią przyjętą w rozdziale 3 zmienność σ_t^2 instrumentu finansowego w momencie t określona jest jako:

$$\sigma_t^2 = E((r_t - E(r_t \mid \mathcal{F}_{t-1}))^2 \mid \mathcal{F}_{t-1}) \tag{6.2}$$

zmienność jako wariancja warunkowa

Zmienność σ_t^2 jest zatem wariancją warunkową zwrotu r_t względem σ-ciała $\mathcal{F}_{t-1}$. W szczególności jest ona $\mathcal{F}_{t-1}$-mierzalna, czyli proces stochastyczny σ_t^2 jest prognozowalny. Oznacza to, że wartość zmienności σ_t^2 może być określona na podstawie informacji, które napłynęły do momentu $t-1$ włącznie. W pewnych modelach (np. zmienności stochastycznej, o których mówimy w rozdziale 8) zmiennością σ_t^2 nazywa się również wariancję warunkową zwrotu względem σ-ciała większego od $\mathcal{F}_{t-1}$, zawierającego informacje na temat dodatkowych niezależnych zaburzeń. Przy takim ujęciu, zmienność σ_t^2, również w momencie t, jest zmienną losową.

Dodajmy, że w finansach, inaczej niż w ekonometrii finansowej, przez zmienność często rozumie się nie wariancję warunkową σ_t^2, lecz warunkowe odchylenie standardowe σ_t.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

6.2. Zmienność zrealizowana

Jak można było zauważyć w rozdziale 3, jeżeli traktujemy kwadrat zwrotu dziennego jako estymator dziennej zmienności, to jakość prognoz zmienności jest niezadowalająca. Okazuje się, że wynika to z samych właściwości modeli GARCH. W tym rozdziale omówimy problemy, które są z tym związane, i niektóre próby ich rozwiązania.

Do niedawna, oceniając jakość prognoz zmienności, standardowo przyjmowano za zrealizowaną jej wartość kwadrat stopy zwrotu (po odjęciu średniej warunkowej) y_t^2. Uzasadniano to tym, że w modelu GARCH $y_t^2 = \sigma_t^2 \varepsilon_t^2$, a ponieważ $E(\varepsilon_t^2) = 1$ oraz σ_t^2 i ε_t^2 są niezależne, więc y_t^2 jest nieobciążonym estymatorem wariancji warunkowej. Czynnik ε_t^2 powoduje jednak znaczne zanieczyszczenie szumem (zwiększa wariancję estymatora), co – jak się wydaje – jest główną przyczyną ogólnie potwierdzanej słabej możliwości prognostycznej tego podejścia. Spektakularnie objawia się to podczas próby stosowania współczynnika determinacji R^2 Mincera–Zarnowitza (zob. porozdział 3.7) jako oceny jakości prognozy. Jak wykazali Andersen i Bollerslev (1998), przy założeniu istnienia skończonego bezwarunkowego momentu czwartego rzędu dla y_t, zastępując w równaniu regresji σ_{n+1+j}^2 przez y_{n+1+j}^2, mamy dla modelu teoretycznego równość:

$$R^2 = \frac{\alpha_1^2}{1 - \beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_1}$$

jakość prognoz zmienności z modeli GARCH w odniesieniu do kwadratu stopy zwrotu $R^2 < \frac{1}{3}$

Ponieważ warunek istnienia skończonego bezwarunkowego momentu czwartego rzędu ma postać $(\alpha_1 + \beta_1)^2 + 2\alpha_1^2 < 1$, więc otrzymujemy, w naszej sytuacji, ograniczenie z góry dla współczynnika determinacji: $R^2 < \frac{1}{3}$. W praktyce wartości R^2 otrzymywane dla empirycznych danych finansowych są rzędu kilku setnych. Andersen i Bollerslev jako pierwsi zasugerowali, że problem może leżeć w nieadekwatnym doborze miary zmienności.

W swojej fundamentalnej pracy zatytułowanej *Answering the skeptics. Yes, standard volatility models do provide accurate forecasts* Andersen i Bollerslev (1998) proponują nowe podejście do pojęcia zmienności instrumentu finansowego. Zakładając, że proces p_t logarytmów cen instrumentu finansowego jest ciągłym procesem dyfuzji danym przez stochastyczne równanie różniczkowe (Sobczyk 1996, Protter 2005):

$$dp_t = \sigma_t dW_t \tag{6.3}$$

gdzie $t \geq 0$, W_t oznacza standardowy ruch Browna, a σ_t jest procesem ściśle stacjonarnym, wykazują, że poprawna miara dziennej zmienności ceny w dniu $t + 1$ wyraża się wzorem:

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

$$\sigma^2_{t+1,1} = \int_0^1 \sigma^2_{t+\tau} d\tau \tag{6.4}$$

dzienna zmienność zrealizowana, wariancja zrealizowana

Nieobserwowalne wielkości $\sigma^2_{t+1,1}$ można przybliżać przez dzienne sumy kwadratów zwrotów śródziennych wyliczanych z odpowiednio dobranymi częstotliwościami (w praktyce najczęściej stosuje się zwroty pięciominutowe). W tym celu Andersen i Bollerslev wprowadzili pojęcie tzw. dziennej zmienności zrealizowanej (obecnie w literaturze częściej używa się w tej sytuacji określenia „wariancja zrealizowana") zdefiniowanej jako suma kwadratów zwrotów śródziennych. Wielkość tę będziemy oznaczać symbolem $Real1_t$ i definiować następująco:

$$Real1_t = \sum_{d=0}^{D} r^2_{t,d} \tag{6.5}$$

gdzie $r_{t,d}$ są śródziennymi stopami zwrotu, przy czym zwrot $r_{0,d}$ odpowiada okresowi pomiędzy ostatnim rozważanym notowaniem dnia z dnia poprzedniego (jest to zwykle kurs zamknięcia) a pierwszym rozważanym notowaniem w dniu t (kurs otwarcia), ponadto t oznacza numer dnia, d – numer kolejnego zwrotu w ciągu dnia, a D jest liczbą notowań śródziennych o rozważanej częstotliwości obserwowanych w ciągu dnia.

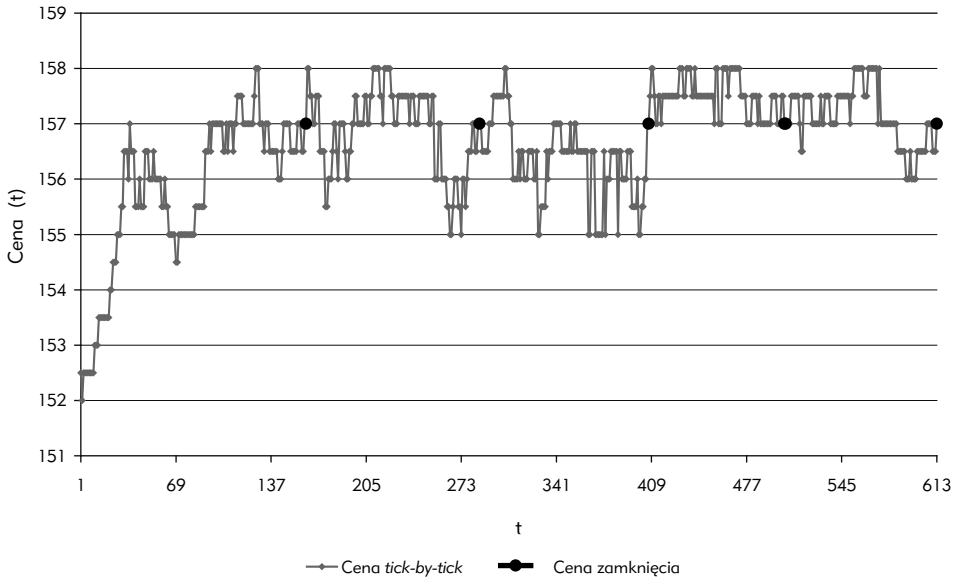
W tej chwili poprzestaniemy na tym raczej intuicyjnym przedstawieniu idei Andersena i Bollersleva. Zainteresowany czytelnik dokładniejsze rozważania teoretyczne znajdzie w podrozdziale 6.5.

Zakończmy te wstępne uwagi spojrzeniem na wykresy przedstawione na ilustracjach 6.1 i 6.2. Pokazują one jeszcze jedną motywację kryjącą się za pojęciem zmienności zrealizowanej. Na pierwszej ilustracji widzimy notowania spółki PROKOM, dla których przez kilka dni kurs zamknięcia utrzymywał się na stałym poziomie. Oceniając zmienność na podstawie notowań dziennych, uznalibyśmy ją za równą zeru, podczas gdy cena zmieniała się dość znacznie. Z podobną sytuacją mamy do czynienia w wypadku Elektrimu w dniu 3 lipca 2007 r. Wyliczenie zmienności zrealizowanej na podstawie notowań śródziennych pozwala na uniknięcie tego typu pułapek przy ocenianiu zmienności.

Pojawienie się pojęcia zmienności zrealizowanej było silnym bodźcem do prowadzenia badań poświęconych zmienności w ogóle, a analizie właściwości zmienności zrealizowanej w szczególności. Stosowana przez Andersena i Bollersleva (1998) dzienna zmienność zrealizowana określona została jako suma kwadratów zwrotów śródziennych o ustalonych częstotliwościach. Faktycznie we wspomnianej pracy analiza oparta była na zwrotach pięciominutowych i przeprowadzona została dla szeregów notowań kursów walutowych. Radykalna poprawa jakości prognoz zmienności uzyskiwanych za pomocą modeli GARCH

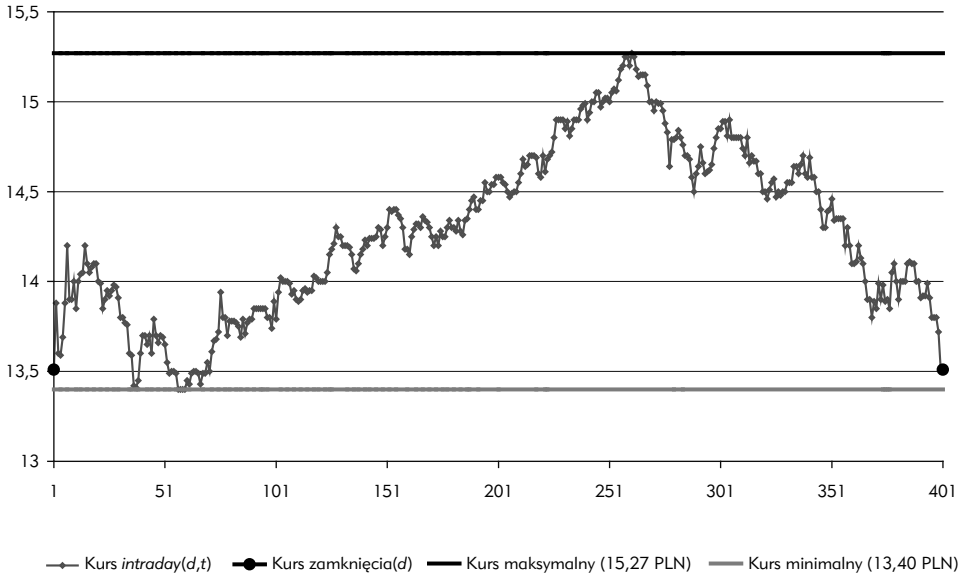
Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 6.1. Notowania *tick-by-tick* spółki PROKOM w okresie od 20 do 24 lutego 2006



Źródło: P. Barański, *Zmienność zrealizowana jako miara zmienności instrumentów finansowych* [praca magisterska], Wydział Informatyki Gospodarki Elektronicznej, AE w Poznaniu, Poznań 2008.

Ilustracja 6.2. Notowania intraday spółki ELEKTRIM w dniu od 3 lipca 2007 oraz ceny zamknięcia w dniach 2 i 3 lipca 2007



Źródło: P. Barański, *Zmienność zrealizowana jako miara zmienności instrumentów finansowych* [praca magisterska], Wydział Informatyki Gospodarki Elektronicznej, AE w Poznaniu, Poznań 2008.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

po porównaniu ich z dzienną zmiennością zrealizowaną zamiast z kwadratem zwrotu dziennego (kryterium oceny jakości prognozy był współczynnik determinacji w regresji Mincera–Zarnowitza) stanowiła wystarczającą zachętę do rozwinięcia szeroko zakrojonych badań empirycznych. Zastosowanie pojęcia zmienności zrealizowanej do szerokiej grupy szeregów zwrotów finansowych ujawniło jednak wiele wątpliwości i problemów praktycznych.

Jeżeli analizujemy zmienność zrealizowaną na podstawie notowań giełdowych, to powstaje trudność związana z tym, że giełda funkcjonuje tylko w określonych godzinach i w związku z tym rozważane przez nas zwroty śródzienne nie mogą być jednorodne względem czasu. W takim wypadku zmienność zrealizowana jest np. sumą kwadratów zwrotów pięciominutowych i kwadratu tzw. zwrotu nocnego. Odstęp czasowy między ostatnim notowaniem danego dnia a pierwszym następnego jest długi, co powoduje, że zwrot pomiędzy dniami ma inną naturę niż zwroty śródzienne. W modyfikacji (6.6) wzoru (6.5) wyróżniamy ten zwrot, tak więc składnikami sumy definiującej zmienność zrealizowaną są: kwadrat zwrotu nocnego ($r_{t,N}$) oraz kwadraty zwrotów śródziennych $r_{t,d}$:

$$Real1_t = r_{t,N}^2 + \sum_{d=1}^{D} r_{t,d}^2 \tag{6.6}$$

6.2.1. Przykład

Poniżej przedstawiamy przykład bardzo optymistycznych wyników dotyczących jakości prognoz zmienności dla indeksu WIG20 (Doman R. 2003a). Tabela 6.1 przedstawia oszacowania parametrów modelu GARCH(1,1) dla dziennych zwrotów indeksu WIG20. Ilustracje 6.3–6.5 oraz tabele 6.2 i 6.3 pokazują opisaną przez Andersena i Bollersleva radykalną poprawę jakości prognoz uzyskanych za pomocą modelu GARCH w odniesieniu do miary zmienności *Real*1, następującą ze wzrostem częstotliwości zwrotów wykorzystanych przy wyliczaniu *Real*1. Badanie zostało przeprowadzone dla danych z okresu od 3 stycznia 1997 r. do 31 grudnia 2001 r. (okres próby) i od 2 stycznia 2002 r. do 14 sierpnia 2002 r. (okres prognozy). Rozważany w nich szereg jest zatem podzbiorem tego, który wykorzystujemy w ilustracjach empirycznych. Porównując te wyniki z przedstawionymi w części tego rozdziału poświęconej praktyce modelowania, czytelnik powinien oddać się refleksjom na temat wpływu doboru okresu próby i okresu prognozy na jakość prognoz.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Tabela 6.1. Oszacowania parametrów modelu GARCH(1,1) procentowych logarytmicznych zwrotów dziennych notowań indeksu WIG20 w okresie 3.01.1997–31.12.2001. W nawiasach podano błędy standardowe estymacji: w okrągłych – metoda największej wiarygodności, w kwadratowych – metoda quasi-największej wiarygodności

Rozkład warunkowy	ω	α_1	β_1	ν
normalny	0,2821	0,1491	0,7974	–
	(0,0827)	(0,0256)	(0,0342)	–
	[0,1183]	[0,0403]	[0,0534]	–
t Studenta	0,2355	0,1261	0,8282	8,5177
	(0,0903)	(0,0289)	(0,0396)	(1,9207)
	[0,1086]	[0,0353]	[0,0494]	[1,7794]

Tabela 6.2. Ocena prognozy zmienności zrealizowanej indeksu WIG20 otrzymanej za pomocą modelu GARCH(1,1) z rozkładem warunkowym normalnym

Horyzont prognozy	Częstotliwość zwrotu	R^2	MAE	ME	RMSE	AMAPE	TIC
1 dzień	1 dzień	0,0279	2,7503	– 0,7802	4,1026	0,5812	0,5141
	30 minut	0,3857	1,5829	– 0,6738	2,2689	0,3310	0,3267
	10 minut	0,3848	1,5126	– 0,8724	2,0774	0,3331	0,3166
	5minut	0,3014	1,5141	– 0,9982	2,0559	0,3325	0,3253
2 dni	1 dzień	0,0239	2,7944	– 0,8407	4,1279	0,5849	0,5144
	30 minut	0,2867	1,6917	– 0,7325	2,4107	0,3441	0,3449
	10 minut	0,2778	1,6267	– 0,9298	2,2279	0,3459	0,3366
	5 minut	0,2225	1,6261	– 1,0559	2,1767	0,3456	0,3421
3 dni	1 dzień	0,0287	2,7784	– 0,9642	3,9430	0,5871	0,5019
	30 minut	0,2583	1,7577	– 0,8020	2,4669	0,3540	0,3514
	10 minut	0,2451	1,6997	– 0,9914	2,2944	0,3562	0,3446
	5 minut	0,1975	1,6962	– 1,1163	2,2357	0,3558	0,3491
4 dni	1 dzień	0,0285	2,7897	– 1,0517	3,8635	0,5892	0,4960
	30 minut	0,2319	1,8150	– 0,8712	2,5119	0,3621	0,3568
	10 minut	0,2194	1,7528	– 1,0608	2,3371	0,3641	0,3503
	5 minut	0,1723	1,7555	– 1,1819	2,2871	0,3644	0,3558
5 dni	1 dzień	0,0211	2,8215	– 1,1268	3,8491	0,5922	0,4957
	30 minut	0,1993	1,8795	– 0,9367	2,5687	0,3702	0,3635
	10 minut	0,1918	1,8146	– 1,1243	2,3878	0,3721	0,3566
	5 minut	0,1503	1,8141	– 1,2412	2,3370	0,3722	0,3619

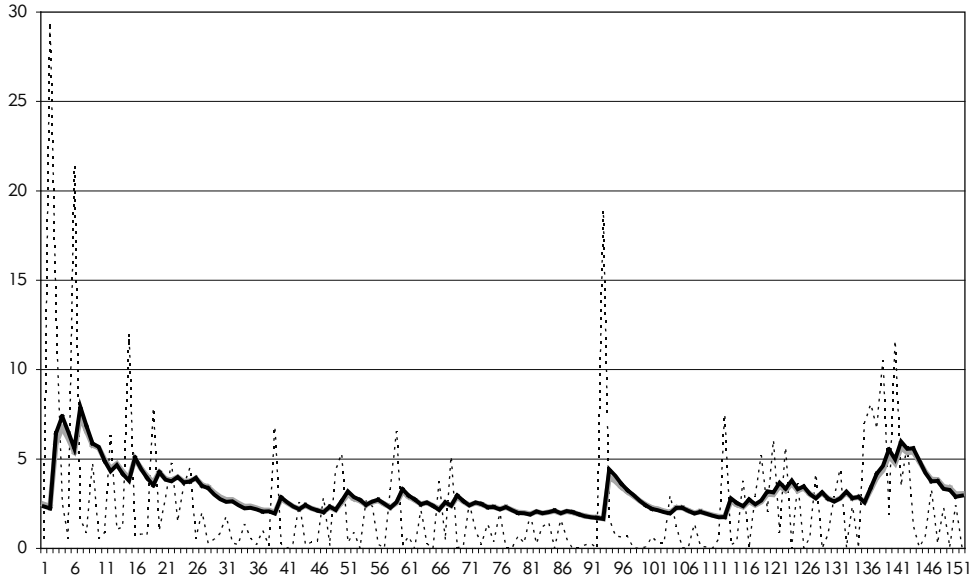
Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Tabela 6.3. Ocena prognozy zmienności zrealizowanej indeksu WIG20 otrzymanej za pomocą modelu GARCH(1,1) z warunkowym rozkładem *t* Studenta

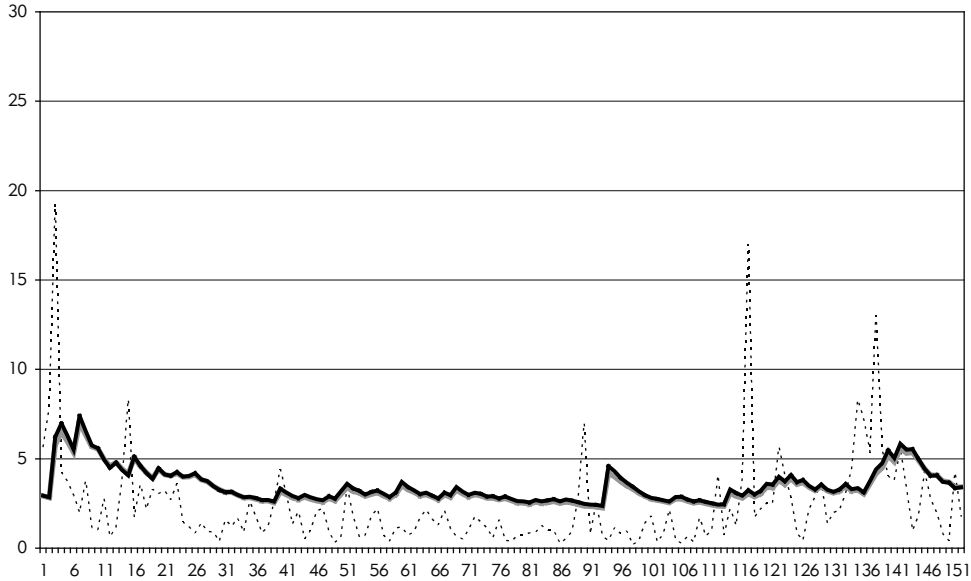
Horyzont prognozy	Częstotliwość Zwrotu	R^2	MAE	ME	RMSE	AMAPE	TIC
1 dzień	1 dzień	0,0281	2,7378	– 0,7513	4,0867	0,5816	0,5157
	30 minut	0,3645	1,5943	– 0,6449	2,3012	0,3324	0,3340
	10 minut	0,3629	1,5192	– 0,8435	2,1002	0,3340	0,3221
	5minut	0,2831	1,5180	– 0,9693	2,0600	0,3332	0,3288
2 dni	1 dzień	0,0242	2,7756	– 0,8013	4,1095	0,5847	0,5161
	30 minut	0,2734	1,6851	– 0,6930	2,4237	0,3436	0,3499
	10 minut	0,2651	1,6138	– 0,8903	2,2296	0,3448	0,3401
	5 minut	0,2126	1,6116	– 1,0164	2,1648	0,3443	0,3436
3 dni	1 dzień	0,0283	2,7539	– 0,9147	3,9240	0,5866	0,5039
	30 minut	0,2447	1,7432	– 0,7525	2,4732	0,3524	0,3560
	10 minut	0,2329	1,6780	– 0,9419	2,2892	0,3539	0,3474
	5 minut	0,1878	1,6714	– 1,0658	2,2178	0,3532	0,3501
4 dni	1 dzień	0,0280	2,7590	– 0,9929	3,8419	0,5882	0,4981
	30 minut	0,2182	1,7939	– 0,8123	2,5134	0,3596	0,3609
	10 minut	0,2075	1,7227	– 1,0220	2,3250	0,3608	0,3525
	5 minut	0,1634	1,7212	– 1,1230	2,2622	0,3606	0,3562
5 dni	1 dzień	0,0210	2,7842	– 1,0591	3,8214	0,5909	0,4974
	30 minut	0,1867	1,8489	– 0,8690	2,5631	0,3667	0,3671
	10 minut	0,1807	1,7766	– 1,0566	2,3687	0,3679	0,3582
	5 minut	0,1419	1,7712	– 1,1735	2,3057	0,3674	0,3617

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 6.3. Kwadraty zwrotów dziennych (linia przerywana) i prognozy σ_t^2 jeden dzień naprzód, otrzymane za pomocą modelu GARCH(1,1) (linia czarna) oraz modelu *t*-GARCH(1,1) (linia szara)

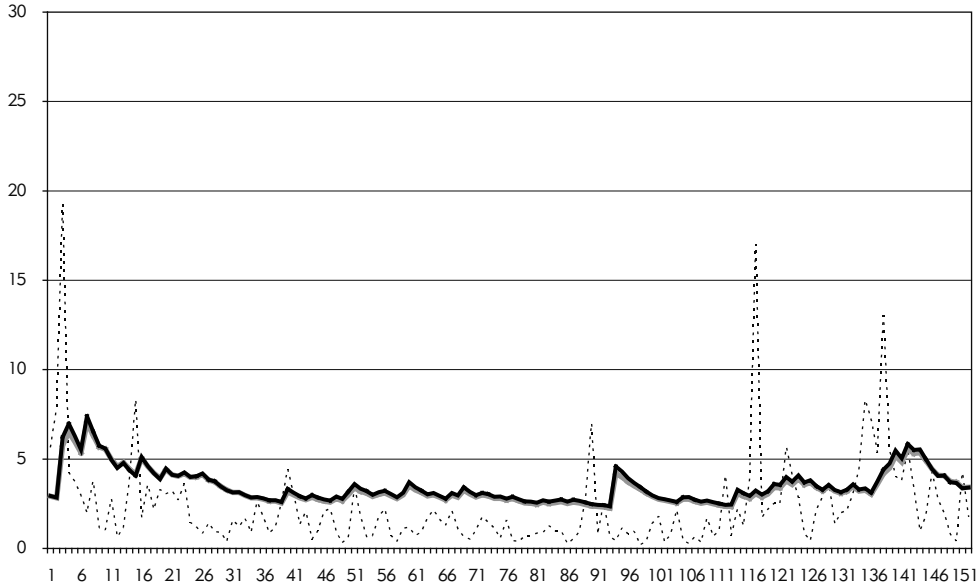


Ilustracja 6.4. Dzienna zmienność zrealizowana dla zwrotów półgodzinnych (linia przerywana) i prognozy σ_t^2 jeden dzień naprzód, otrzymane za pomocą modelu GARCH(1,1) (linia czarna) oraz modelu *t*-GARCH(1,1) (linia szara)



Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 6.5. Dzienna zmienność zrealizowana dla zwrotów półgodzinnych (linia przerywana i prognozy σ_t^2 pięć dni naprzód, otrzymane za pomocą modelu GARCH(1,1) (linia czarna) oraz modelu *t*-GARCH(1,1) (linia szara)



6.2.2. Różne miary zmienności zrealizowanej

Podstawową przyczyną odejścia od traktowania kwadratu zwrotu dziennego jako estymatora zmienności był fakt znacznego zanieczyszczenia tego estymatora szumem losowym. Jednak długi okres, jakiemu odpowiada zwrot nocny w opisanej powyżej sytuacji, powoduje, że za pośrednictwem tego zwrotu miara zmienności *Real*1 jest również znacznie obciążona szumem. W wypadku polskiego rynku finansowego efekt zanieczyszczenia zwrotu nocnego szumem jest potęgowany przez ogromny napływ informacji gospodarczych pojawiających się po zamknięciu giełdy (np. po 16.00 publikowane są przez GUS i NBP dane makroekonomiczne). Wszystko to sprawia, że choć *Real*1 jest znacznie lepszym estymatorem zmienności niż kwadrat zwrotu dziennego, to jednak uważa się, iż nadal jest to estymator bardzo zanieczyszczony szumem.

Alternatywna miara zmienności zrealizowanej oznaczana przez nas symbolem *Real*2 zaproponowana została w 2001 r., choć podobne podejście pojawiło się już wcześniej w pracy Andersena i Bollersleva (1997). Miara ta jest równa sumie kwadratów zwrotów śródziennych bez uwzględniania zwrotu nocnego:

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

$$Real2_t = \sum_{d=1}^{D} r_{t,d}^2 \tag{6.7}$$

W pracy Andersena, Bollersleva, Diebolda i Ebensa (2001) jest ona nazywana zmiennością dzienną. Badania empiryczne wykazują jednak, że miara ta daje bardzo zaniżone oszacowania zmienności zrealizowanej. W związku z tym Martens (2002) zaproponował przeskalowanie *Real*2 za pomocą pewnego współczynnika, wprowadzając nową miarę zmienności zrealizowanej oznaczaną przez nas symbolem *Real*3 i określonej jako:

modyfikacja Martensa

$$Real3_t = (1+c)\sum_{d=1}^{D} r_{t,d}^2 \tag{6.8}$$

Opinie na temat wartości stałej c są różne. Martens (2002) ustala jej wartość w wypadku notowań kontraktów *futures* na indeks S&P500 na około 0,205, powołując się na wyniki symulacji. Nie podaje jednak żadnego uzasadnienia teoretycznego. Hol i Koopman (2002) przyjmują, że: $c = \frac{\sigma_{co}^2}{\sigma_{oc}^2}$, gdzie σ_{co}^2 oznacza empiryczną wariancję zwrotu między kursem zamknięcia a kursem otwarcia w dniu następnym, a σ_{oc}^2 jest empiryczną wariancją zwrotu dziennego.

Przeskalowanie takie wydaje się naturalne, gdy chodzi o uwzględnienie wpływu zwrotu nocnego na zmienność bez wprowadzania do jej miary szumu nieodłącznie związanego z tym zwrotem. Miarą zmienności zrealizowanej *Real*3 według Hol i Koopmana (2002) jest zatem:

$$Real3_t = \left(1 + \frac{\sigma_{co}^2}{\sigma_{oc}^2}\right)\sum_{d=1}^{D} r_{t,d}^2 \tag{6.9}$$

Wartość określonej wyżej wielkości c zależy od analizowanego szeregu i w badaniach empirycznych waha się od kilku setnych do prawie 0,5. Jej oszacowania są jednak zwykle dość stabilne.

6.3. Efekty mikrostruktury rynku a zmienność zrealizowana

Kolejnym istotnym problemem związanym ze stosowaniem zmienności zrealizowanej jest zagadnienie wyboru częstotliwości dla występujących w jej określeniu zwrotów śródziennych. Ponieważ sama idea zmienności zrealizowanej wywodzi się z teorii procesów stochastycznych z czasem ciągłym, wydawać by się mogło, że należy stosować zwroty obserwowane w możliwie najkrótszych

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

wybór częstotliwości dla zwrotów śródziennych

odstępach czasu. Jednak okazuje się, że zbyt częste pobieranie obserwacji może prowadzić do zafałszowania oszacowań zmienności ze względu na tak zwane efekty mikrostruktury rynku, o których pobieżnie wspominamy w tym podrozdziale. Literatura poświęcona wyborowi optymalnej częstotliwości jest bardzo obszerna. Niemniej problem ten pozostaje ciągle jeszcze otwarty. Panuje jednak zgoda, że raczej nie powinno się wykorzystywać zwrotów wyliczanych częściej niż co 5 minut ani rzadziej niż co godzinę. Wybór zawsze musi być dokonywany dla konkretnego rynku z uwzględnieniem jego specyfiki, a zwłaszcza płynności i wpływu aktywności animatorów rynku.

efekty mikrostruktury rynku

Gdy próbujemy stosować modele z czasem ciągłym do opisu rzeczywiście istniejących rynków, zwykle pojawia się wiele problemów określanych wspólną nazwą efektów mikrostruktury rynku. Wykrywa się je przy okazji analizy danych wysokiej częstotliwości. Choć tego typu dane wydają się być niezwykle użyteczne przy weryfikacji modeli z czasem ciągłym, to jednak mają one specyficzne właściwości wymagające od badacza szczególnej uwagi przy doborze modelu i interpretacji danych. Problem efektów mikrostruktury rynku pojawia się, jak już wspomniano, również przy wyborze estymatora dziennej zmienności zrealizowanej.

Do szczegółowych aspektów mikrostruktury rynku zalicza się płynność, koszty transakcyjne, zmienność cen, stopień odzwierciedlania informacji przez ceny, asymetrię informacji, intensywność procesu napływu informacji oraz zyski transakcyjne. Wszystkie te elementy są powiązane z podstawową funkcją rynku, którą jest ułatwienie spotkań kupujących i sprzedających o odpowiadających sobie oczekiwaniach i umożliwienie dokonania transakcji. Jednocześnie elementy te mają ogromny wpływ na właściwości dynamiczne szeregów zwrotów, w szczególności zwrotów o wysokiej częstotliwości. Z jednej strony analiza danych o wysokiej częstotliwości dostarcza nam informacji na temat mikrostruktury rynku, pozwalając tym samym na budowanie bardziej adekwatnych modeli i dokładniejszy wgląd w różnego rodzaju zależności występujące na rynku, a z drugiej strony świadomość istnienia efektów mikrostruktury zabezpiecza przed bezkrytycznym przyjmowaniem pozornych zależności występujących w szeregach zwrotów i szeregach zmienności.

Badając właściwości szeregów zwrotów instrumentów finansowych, z reguły analizujemy obserwacje pobierane w równych odstępach czasu. Jednak w rzeczywistości transakcje nie są zsynchronizowane, np. zmiany cen różnych akcji dokonują się z różnymi częstotliwościami i nawet w wypadku akcji jednej spółki intensywność transakcji zmienia się w ciągu dnia czy tygodnia. Szczególnie jest to widoczne w wypadku rynku o stosunkowo małej płynności, jakim jest GPW w Warszawie. Uważniejsza analiza notowań śródziennych dla spółek notowanych

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

na GPW pokazuje, że nierzadko faktyczna zmiana ceny następuje w odstępach nie krótszych niż godzinne. Jedynie w wypadku kilku największych spółek ma sens analiza zwrotów kilkuminutowych (zwykle pięciominutowych). Jednak nawet wtedy, gdy w każdych pięciu minutach następuje zmiana ceny, transakcja, z którą związany jest uzyskany zwrot, zwykle nie dokonuje się dokładnie w momencie upływu tych pięciu minut. Przyjmowane milcząco założenie, że zmiany cen są równo odległe w czasie, może prowadzić do błędnych wniosków, np. związanych z prognozowalnością zwrotów, które w rzeczywistości są nieskorelowane. Efektem nieregularności handlu mogą być pozorne korelacje pomiędzy zwrotami różnych spółek, autokorelacje zwrotów portfela oraz, w niektórych przypadkach, ujemne autokorelacje w szeregach zwrotów poszczególnych spółek.

Rozważmy na przykład zwroty dzienne wyliczane na podstawie kursów zamknięcia dla akcji dwóch spółek, z których pierwszą handluje się znacznie intensywniej niż drugą, a których zwroty są niezależne. Jeżeli na krótko przed zamknięciem giełdy napłynie istotna dla rynku informacja, to można przypuścić, że znajdzie ona odzwierciedlenie w cenach akcji pierwszej spółki jeszcze tego samego dnia, podczas gdy dla drugiej spółki efekt wywołany tą informacją wystąpi dopiero następnego dnia rano. Wielokrotne powtórzenie takiego zdarzenia może doprowadzić do powstania pozornej korelacji zwrotów tych akcji z opóźnieniem jednodniowym, tzn. stworzyć wrażenie, że notowania drugiej spółki podążają za notowaniami spółki pierwszej. Przykład ten, choć bardzo uproszczony, jest dość prawdopodobny w warunkach polskiego rynku finansowego ze względu na przepisy i zwyczaje dotyczące publikowania istotnych informacji ekonomicznych w godzinach popołudniowych. W takim wypadku analiza danych empirycznych prowadzi nas do błędnego wniosku o prognozowalności w rzeczywistości nieprognozowalnych zwrotów r_t. Istotą przedstawionego przykładu jest zwrócenie uwagi na fakt, iż gdy handel odbywa się w nierównych odstępach czasu, a obserwacje są czynione w odstępach równych, rozkłady zwrotów obserwowanych mogą mieć zupełnie inne właściwości niż rozkłady „prawdziwych" zwrotów.

pozorna korelacja

Wydawać by się mogło, że w opisanych wyżej warunkach rozwiązaniem jest analiza nieregularnie rozłożonych zwrotów *tick-by-tick*. Jednak i takie podejście niesie pewne trudności, zwłaszcza w istotnym dla nas kontekście oceny zmienności instrumentów finansowych. Problemy, o których teraz będzie mowa, są związane przede wszystkim z rynkami, na których istotną rolę odgrywają animatorzy rynku. Ich działalność związana z obowiązkiem stałego podtrzymywania płynności rynku ma dwojakiego rodzaju wpływ na właściwości obserwowanych zwrotów. Przede wszystkim sztucznie zawyża zmienność. Dzieje się to w następujący sposób.

działalność animatorów rynku a zawyżone oszacowania zmienności zrealizowanej

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Jeżeli w danym (krótkim) okresie na rynek nie napływają nowe informacje, to cena akcji może „odbijać się" pomiędzy cenami *bid* i *ask*, mimo że nie dochodzi do żadnej transakcji. Z tego powodu przyjmowanie w równaniu zmienności zrealizowanej kwadratów zwrotów wyliczanych w bardzo krótkich odstępach czasu prowadzi do błędnych oszacowań zmienności zrealizowanej. Im rynek jest mniej płynny, tym większy udział w tak liczonej zmienności zrealizowanej ma pozorna zmienność wywołana działalnością animatorów rynku. Drugi aspekt wpływu animatorów rynku na właściwości obserwowanych zwrotów jest związany ze spreadem *bid*/*ask*. Efektem istnienia spreadu mogą być znowu pozorne ujemne korelacje obserwowanych zwrotów, a także skośność występująca w rozkładach zwrotów, będąca wynikiem niesymetrycznego stosunku animatorów rynku do cen kupna i sprzedaży. Autokorelacje w obserwowanych szeregach zwrotów mogą również być efektem wpływu kosztów transakcyjnych.

Znaczącym czynnikiem wywołującym efekty mikrostruktury rynku zakłócające weryfikację modeli z czasem ciągłym przez badania empiryczne jest to, że zarówno możliwe pomiary cen, jak i czasu tworzą zbiory dyskretne. Ponadto, znaczenie ma również fakt zawierania wielu transakcji (nawet po różnych cenach) w tej samej chwili.

Wszystkie wymienione tu zjawiska wpływają na rozkłady obserwowanych zwrotów, a co za tym idzie – również na właściwości zmienności zrealizowanej. Dobór właściwej długości przedziału czasowego, na podstawie którego wyliczane są zwroty, wymaga uwzględnienia tych wszystkich aspektów i niewątpliwie musi być uzależniony od specyfiki rynku. Odstęp powinien być tak dobrany, by nie wystąpiły autokorelacje, i tak długi, by nie pojawiła się pozorna zmienność na skutek działań animatorów rynku. Problem ten jest zagadnieniem natury praktycznej i nie może być rozwiązany tylko za pomocą określenia właściwości zmienności zrealizowanej jako estymatora prawdziwej zmienności, aczkolwiek prowadzone przez wielu badaczy intensywne prace dotyczące tej kwestii mają oczywiście ogromne znaczenie.

6.4. Teoria zmienności zrealizowanej

Najogólniej rzecz biorąc, zmienność (*volatility*) ceny instrumentu finansowego opisuje siłę wahań zwrotu z tego instrumentu w rozpatrywanym przedziale czasu. W sytuacji, gdy transakcje na rynkach finansowych odbywają się w dowolnych chwilach, zwroty instrumentów finansowych, a także pomiary ich zmienności mogą teoretycznie dotyczyć dowolnie krótkich przedziałów czasu. Stanowi to silny argument przemawiający za modelowaniem cen instrumentów finansowych jako procesów stochastycznych z czasem ciągłym. Konsekwencją założenia

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

braku możliwości arbitrażu, skończonych wartości oczekiwanych zwrotów oraz nieistnienia kosztów transakcyjnych jest modelowanie procesu logarytmów cen instrumentu finansowego za pomocą obiektu teorii procesów stochastycznych zwanego semimartyngałem specjalnym (Protter 2005). Istota tego podejścia sprowadza się do możliwości przedstawienia procesu zwrotów logarytmicznych ceny w jednoznacznej postaci jako sumy martyngału lokalnego i procesu prognozowalnego o skończonej wariacji. Pierwszy składnik odpowiada nieprognozowalnej innowacji zwrotu, drugi natomiast zawiera lokalnie deterministyczny dryf sterujący średnią natychmiastową zwrotu.

semimartyngał specjalny

Dla dokładniejszego zobrazowania omawianych tu pojęć niezbędne jest wprowadzenie podstawowych elementów formalizmu teorii procesów stochastycznych z czasem ciągłym. Dokładniejsze definicje można znaleźć w literaturze przedmiotu (np. Protter 2005, Shiryaev 1999, Hunt i Kennedy 2000, Lipcer i Sziriajew 1981, Sobczyk 1996). W dalszym ciągu postaramy się ograniczyć wprowadzany formalizm do niezbędnego minimum.

Niech $p(t)$ oznacza proces logarytmów cen ustalonego instrumentu finansowego, gdzie t przebiega pewien odcinek czasu $[0,T]$ utożsamiany z przedziałem liczb rzeczywistych. Standardowo zakładamy, że proces $p(t)$ określony jest na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ ze stowarzyszoną filtracją $(\mathcal{G})_{t\in[0,T]}$ σ-podciał σ-ciała $\mathcal{G}$, gdzie $\mathcal{G}_t$ generowane jest przez zbiór informacji na temat procesu cen dostępnych do momentu t włącznie. Zakładamy ponadto, że filtracja spełnia zwykłe warunki zupełności i prawostronnej ciągłości, a rozważane procesy stochastyczne mają trajektorie prawostronnie ciągłe z lewostronnymi granicami (np. Protter 2005, Shiryaev 1999). Przy oznaczeniu $r(t) = p(t) - p(0)$ założenie, że proces $p(t)$ jest semimartyngałem specjalnym, jest równoważne żądaniu, by istniała jednoznaczna dekompozycja:

$$r(t) = A(t) + M(t)$$

gdzie $A(t)$ jest procesem prognozowalnym o skończonej wariacji (tzn. każda trajektoria jest funkcją o skończonej wariacji na przedziale $[0,T]$ (Alexiewicz 1969), a $M(t)$ jest martyngałem lokalnym (Protter 2005, Shiryaev 1999).

Istnienie powyższego jednoznacznego rozkładu jest warunkiem bardzo ogólnym i obejmuje praktycznie wszystkie modele używane w standardowej teorii wyceny instrumentów finansowych. Przykładowo opisowi takiemu podlegają procesy Itô, procesy skokowe oraz mieszane procesy dyfuzji ze skokami (Jajuga 2001). Założenie braku możliwości arbitrażu implikuje, że występowanie i wielkość skoków są nieprognozowalne, a zatem składowa martyngałowa $M(t)$ zawiera skoki oraz wszystkie składniki o nieskończonej wariacji. W istocie mamy dalszą dekompozycję:

$$M(t) = M^C(t) + M^J(t)$$

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

gdzie $M^C(t)$ jest ciągłym martyngałem lokalnym o nieskończonej wariacji, a $M^J(t)$ jest martyngałem skompensowanych skoków.

Dla dowolnego semimartyngału $X(t)$, stowarzyszony proces wariacji kwadratowej $[X,X]_t$, $t \in [0,T]$ można zdefiniować wzorem:

wariacja kwadratowa

$$[X,X]_t = X(t)^2 - X(0)^2 - 2\int_0^t X(s_-)dX(s)$$

gdzie $X(s_-)$ oznacza granicę lewostronną, a $0 < t \leq T$.

Przy przyjętych założeniach powyższa całka stochastyczna, będąca uogólnieniem klasycznej całki Itô, jest dobrze zdefiniowana (Protter 2005, Shiryaev 1999). Wariacja kwadratowa $[X,X]$ jest procesem rosnącym o skończonej wariacji na przedziale $[0,T]$. Z punktu widzenia zastosowań tego procesu do mierzenia zmienności ceny instrumentu finansowego, bardzo ważna jest następująca własność procesu $[X,X]$: dla dowolnego ciągu losowych podziałów przedziału $[0,T]$, $0 = \tau_{m,0} \leq \tau_{m,1} \leq ...$, takiego że $\sup_{j\geq 1} (\tau_{m,j+1} - \tau_{m,j}) \to 0$ oraz $\sup_{j\geq 1} \tau_{m,j} \to T$ przy $m \to \infty$ z prawdopodobieństwem 1, ciąg zmiennych losowych

$$\sum_{j\geq 1} (X(t \wedge \tau_{m,j}) - X(t \wedge \tau_{m,j-1}))^2$$

dąży według prawdopodobieństwa jednostajnie ze względu na $t \in [0,T]$ do $[X,X]_t$, gdzie $t \wedge \tau = \min(t,\tau)$.

Jeśli za $X(t)$ przyjmiemy proces logarytmów ceny instrumentu finansowego, to, intuicyjnie, powyższa własność wariacji kwadratowej oznacza, że $[X,X]_t$ jest równe zmienności ceny rozważanego instrumentu realizującej się w sposób ciągły w przedziale czasu $[0,t]$. Z podanej właściwości wynika także uzasadnienie przyjęcia terminu „wariacja kwadratowa" (*quadratic variation*) jako nazwy procesu stochastycznego $[X,X]$. W świetle przywołanej właściwości tego procesu nazwa ta jest zupełnie naturalna, jeśli uwzględnimy to, że w matematyce, a dokładniej w teorii funkcji, wariacją (lub wahaniem) funkcji $f: [a,b] \to R$ nazywa się kres górny zbioru wszystkich sum w postaci:

$$\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

gdzie $a = t_0 < \ldots < t_n = b$ (por. Alexiewicz 1969).

Druga własność wariacji kwadratowej, która wraz z wyżej przytoczoną stanowi teoretyczną podstawę zastosowania tego pojęcia do zdefiniowania zmienności zwrotu *ex-post* w warunkach czasu ciągłego, jest następująca:

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Jeśli M jest martyngałem z lokalnie całkowalnym kwadratem, to zachodzi równość:

$$E((M(t) - M(t-h))^2 \mid \mathcal{G}_{t-h}) = E([M,M]_t - [M,M]_{t-h} \mid \mathcal{G}_{t-h})$$

Lewa strona powyższej równości jest w rozważanej sytuacji równa wariancji warunkowej, $\mathrm{var}(M(t) \mid \mathcal{G}_{t-h})$. Jeśli zatem zdefiniujemy wariację kwadratową $v^2(t,h)$ w przedziale $[t-h,t]$ jako:

$$v^2(t,h) = [M,M]_t - [M,M]_{t-h}$$

to możemy powiedzieć, że wariancja warunkowa $\mathrm{var}(M(t) \mid \mathcal{G}_{t-h})$ różni się od wariacji kwadratowej $v^2(t,h)$ jedynie o wielkość mającą zerową średnią warunkową. Ponieważ w wypadku czasu dyskretnego zmienność instrumentu finansowego w momencie t (np. t-tym dniu) określamy jako $\mathrm{var}(r_t \mid \mathcal{F}_{t-1})$ (lub $\sqrt{\mathrm{var}(r_t \mid \mathcal{F}_{t-1})}$), gdzie r_t jest zwrotem, a $\mathcal{F}_{t-1}$ oznacza zbiór informacji dostępnych do momentu $t-1$ włącznie, więc z tego punktu widzenia wariacja kwadratowa $v^2(t,h)$, w świetle wyżej wymienionych jej właściwości, jest jak najbardziej naturalnym kandydatem do miana zmienności instrumentu finansowego w dniu t, w kontekście czasu ciągłego. Z tych też powodów Andersen, Bollerslev, Diebold i Labys (2001a) proponują przyjęcie wariacji kwadratowej $v^2(t,h)$ jako miary zmienności ceny instrumentu finansowego (lub, w niektórych pracach, zwrotu tej ceny) na przedziale $[t-h,t]$. Natomiast Barndorff-Nielsen i Shephard (2002) określają tak zdefiniowaną zmienność mianem zmienności aktualnej (*actual volatility*).

Przedstawione wyżej, z konieczności bardzo skrótowe, podejście do mierzenia zmienności instrumentu finansowego na idealnym, bezarbitrażowym rynku z czasem ciągłym kończymy, pokazując, jak wyraża się wariacja kwadratowa, czyli w naszym ujęciu zmienność, w wypadku gdy logarytmiczna cena instrumentu finansowego ewoluuje zgodnie z dynamiką określoną przez stochastyczne równanie dyfuzji ze skokami (Barndorff-Nielsen i Shephard 2001, Jajuga 2001):

$$dp(t) = (\mu + \beta\sigma^2(t))dt + \sigma(t)\,dW(t) + k(t)\,dJ(t)$$

W powyższym równaniu $0 \le t \le T$, $W(t)$ jest standardowym ruchem Browna, a $J(t)$ oznacza proces Poissona, przy czym $J(t) = 1$ lub $J(t) = 0$ w zależności od tego, czy w momencie t następuje skok, a $k(t)$ oznacza intensywność skoku.

Przy przyjętych założeniach o rynku finansowym zachodzi równość zmiennych losowych:

$$v^2(t,h) = \int_0^h \sigma^2(t-h+s)ds + \sum_{t-h \le s \le t} k^2(s) \cdot J(s)$$

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Barndorff-Nielsen i Shephard (2004) wykorzystali ten związek, rozwijając teorię pozwalającą badać występowania skoków w procesie z czasem ciągłym generującym ceny instrumentów finansowych.

6.5. Od teorii do praktyki

Przyjrzyjmy się teraz jakości prognoz otrzymanych za pomocą oszacowanych we wcześniejszych rozdziałach modeli GARCH i porównajmy je z oszacowaniami zmienności zrealizowanej.

Tabela 6.4 zawiera wartości współczynnika $1 + c$ wybranych szeregów polskiego rynku finansowego, wyliczone na podstawie obserwacji w próbie. Można zauważyć, że w wypadku kursów walutowych jego wartości są wyraźnie niższe. Ogólna obserwacja jest taka, że im płynniejszy rynek, tym mniejsza wartość c. W wypadku najważniejszych indeksów z dużych giełd i w wypadku głównych kursów walutowych w zasadzie nie ma potrzeby wyliczania zmienności *Real*3, można stosować *Real*1.

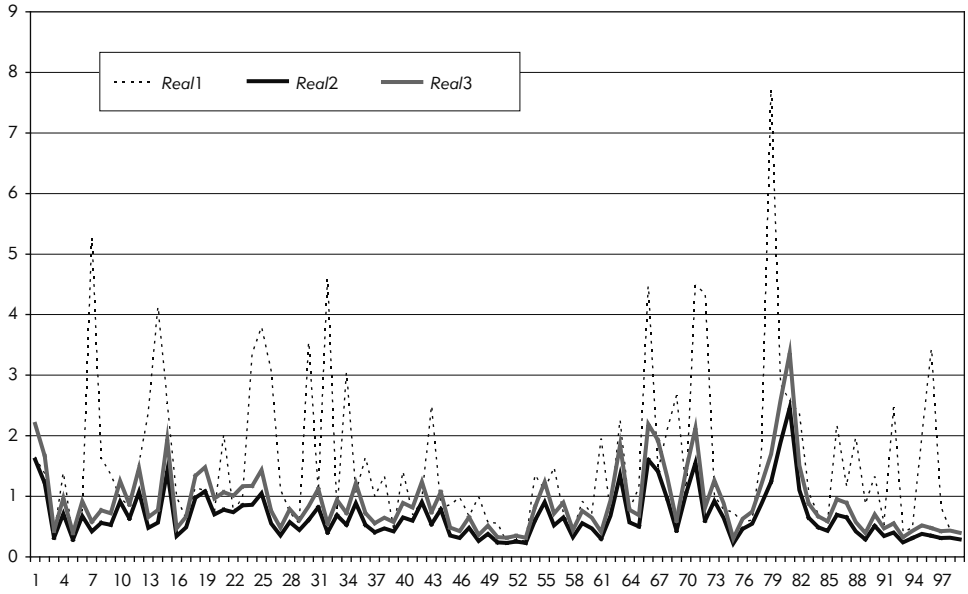
Tabela 6.4. Wartości współczynnika $1 + c = 1 + \frac{\sigma^2_{co}}{\sigma^2_{oc}}$

Instrument	*c*
WIG	1,36814
WIG20	1,28676
EURPLN	1,19974
USDPLN	1,08178
PKNOrlen	1,40759

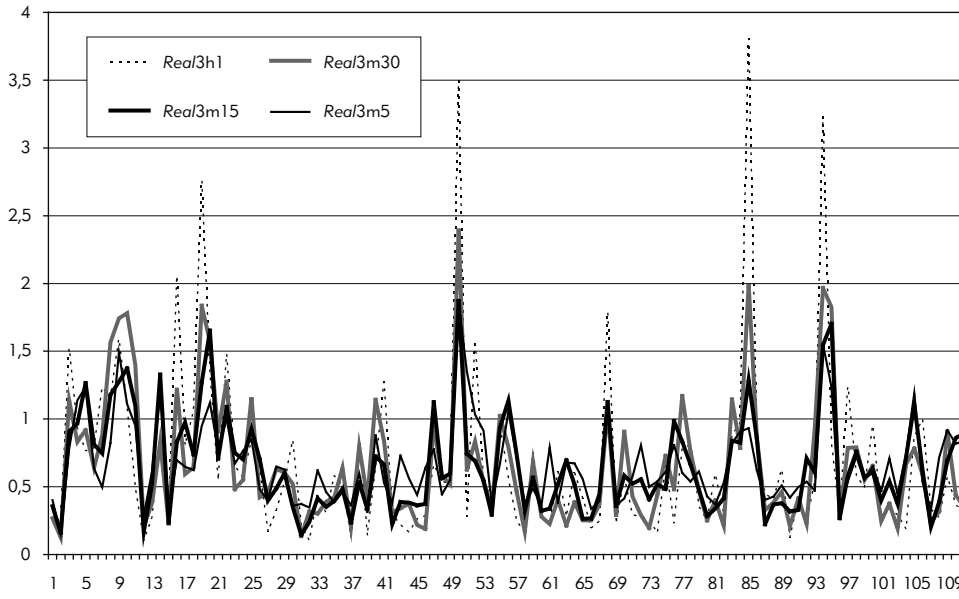
Wykresy na ilustracji 6.6 przedstawiają zmienności zrealizowane *Real*1, *Real*2 *i Real*3 odpowiadające zwrotom pięciominutowym indeksu WIG w okresie od 2.01.2003 do 30.05.2003. Ilustracja 6.7 zawiera zestawienie wykresów zmienności zrealizowanej *Real*3 indeksu WIG w tym samym okresie, odpowiadającej zwrotom pięciominutowym, piętnastominutowym, półgodzinnym i godzinnym.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustarcja 6.6. WIG. Zmienności zrealizowane wyliczone na podstawie pięciominutowych stóp zwrotu w okresie 2.01.2003–30.05.2003



Ilustracja 6.7. Zmienność zrealizowana *Real*3 indeksu WIG w zależności od częstotliwości zwrotów. Okres 2.01.2003–6.06.2003



Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Zobaczmy teraz, jaka jest jakość prognoz wyliczonych za pomocą modeli z rodziny GARCH oszacowanych przez nas w poprzednich rozdziałach. Oceny prognoz dokonamy, przyjmując za punkt odniesienia wartości zmienności zrealizowanych *Real*1 i *Real*3.

Oprócz modeli opisanych w tabeli 3.3, rozważamy jeszcze prognozy z czwartego modelu – dopasowanego do szeregu WIG*k* – modelu ARCH(3), ze zmiennością zrealizowaną *Real*3 (z opóźnieniem 1) jako dodatkową zmienną objaśniającą w równaniu wariancji warunkowej (tabela 6.5). Ilustracja 6.8 oraz tabele 6.6 i 6.7 pozwalają na ocenę jakości prognoz indeksu WIG dokonanych za pomocą czterech różnych modeli.

Należy podkreślić, że zmienność zrealizowaną często wprowadza się do równania wariancji warunkowej w charakterze zmiennej objaśniającej. Stoi za tym przekonanie, że zmienność zrealizowana jest lepszym estymatorem „prawdziwej" zmienności niż oszacowania z modelu GARCH. W rozdziale 8 przy okazji analizy modeli zmienności stochastycznej zwrócimy uwagę na ciekawy efekt substytucji pomiędzy tymi dwiema miarami zmienności.

zmienność zrealizowana jako zmienna objaśniająca w równaniu wariancji warunkowej

Tabela 6.5. Oszacowania parametrów modeli dopasowanych do szeregów zwrotów indeksów WIG i WIG20 ze zmiennością zrealizowaną w równaniu wariancji warunkowej

Szereg	**WIG*k***	**WIG20*k***
Model	**GARCH(0,3)+*Real*3 z opóźnieniem 1**	**GARCH(0,1)+*Real*3 z opóźnieniem3**
Rozkład błędu	Normalny	GED
a_1	0,1239 (90,0479)	–
ω	–	2,0046 (0,3598)
ω_1	0,9072 (0,1972)	0,4680 (0,2028)
α_1	0,4349 (0,2198)	0,0556 (0,0484
α_4 albo α_3	–	–
β_1	– 0,0678 (0,0122)	–
DF	–	1,5666 (0,1433)

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Tabela 6.6. Błędy prognoz i współczynnik R^2 regresji Mincera–Zarnowitza dla prognoz zmienności indeksu WIG wyestymowanych na podstawie długiego szeregu obserwacji WIG*d* za pomocą modeli przedstawionych w tabeli 3.2

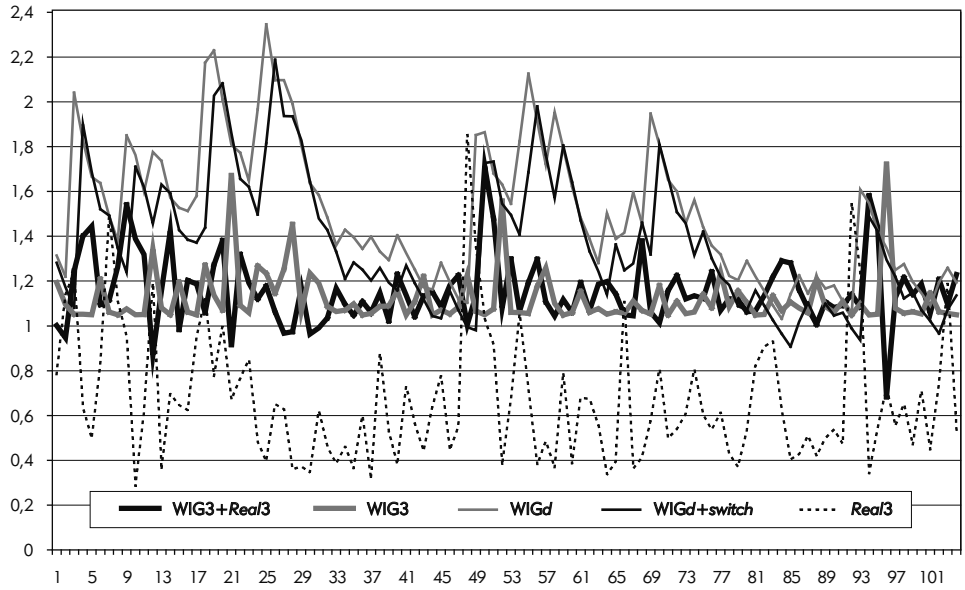
	AR-GARCH	**AR-GARCH**	**AR-GARCH**+*switch*	**AR-GARCH**+*switch*
	***Real*1**	***Real*3**	***Real*1**	***Real*3**
R^2	0,027	0,003	0,027	0,0040
MSE	0,9406	0,9042	0,7606	0,6830
MedSE	0,7355	0,6864	0,5271	0,4934
ME	– 0,7091	– 0,8574	– 0,5710	– 0,7204
MAE	0,8821	0,8812	0,7759	0,7527
RMSE	0,9698	0,9509	0,8721	0,8265
MAPE	1,6930	1,7550	1,4660	1,5110
AMAPE	0,4055	0,4162	0,3754	0,3797
TIC	0,3784	0,4194	0,3594	0,3877
LLF	1,0040	1,0270	0,8562	0,8644

Tabela 6.7. Błędy prognoz i współczynnik R^2 regresji Mincera–Zarnowitza dla prognoz zmienności indeksu WIG na podstawie krótkiego szeregu obserwacji WIG*k* i modeli przedstawionych w tabelach 3.2 i 6.5

	GARCH(0,4)	**GARCH(0,4)**	**GARCH(0,3)**+*Real*3	**GARCH(0,3)**+*Real*3
	***Real*1**	***Real*3**	***Real*1**	***Real*3**
R^2	0,001	0,003	0,007	0,075
MSE	0,5276	0,3094	0,5458	0,3265
MedSE	0,3429	0,2750	0,3649	0,2980
ME	– 0,3214	– 0,4516	– 0,3574	– 0,4884
MAE	0,6062	0,4987	0,6208	0,5192
RMSE	0,7264	0,5562	0,7388	0,5714
MAPE	1,094	1,0040	1.1890	1,0760
AMAPE	0,3254	0,2973	0,3321	0,3066
TIC	0,3377	0,2991	0,3378	0,3017
LLF	0,6316	0,5301	0,6900	0,5748

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 6.8. Prognozy zmienności indeksu WIG uzyskane za pomocą modeli przedstawionych w tabelach 3.2 i 6.5



Oszacowania zmienności oparte na długich szeregach zwrotów są znacznie zawyżone. Błędy prognozy są w większości wypadków niższe w stosunku do miary *Real*3. Najmniejszymi błędami cechuje się prognoza uzyskana na podstawie modelu GARCH(0,3) dopasowanego do krótkiego szeregu zwrotów. Najwyższą wartość R^2 daje prognoza na podstawie modelu GARCH(0,3) z dodatkową zmienną objaśniającą *Real*3. Wprowadzenie tej zmiennej spowodowało, że szereg nieco gorzej opisuje poziom zmienności, ale lepiej oddaje kierunki jej zmian.

Prognozy zmienności uzyskane dla notowań indeksu WIG20 są podobnej jakości jak prognozy uzyskane dla głównego indeksu WIG. Zarówno wykresy na ilustracji 6.9, jak i wyniki zamieszczone w tabeli 6.8 wskazują, że dla indeksu WIG20 lepsze prognozy dostajemy na podstawie modeli dopasowanych do długiego szeregów zwrotów WIG20*d*.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 6.9. Prognozy zmienności indeksu WIG20 uzyskane za pomocą modeli przedstawionych w tabelach 3.5 i 6.5

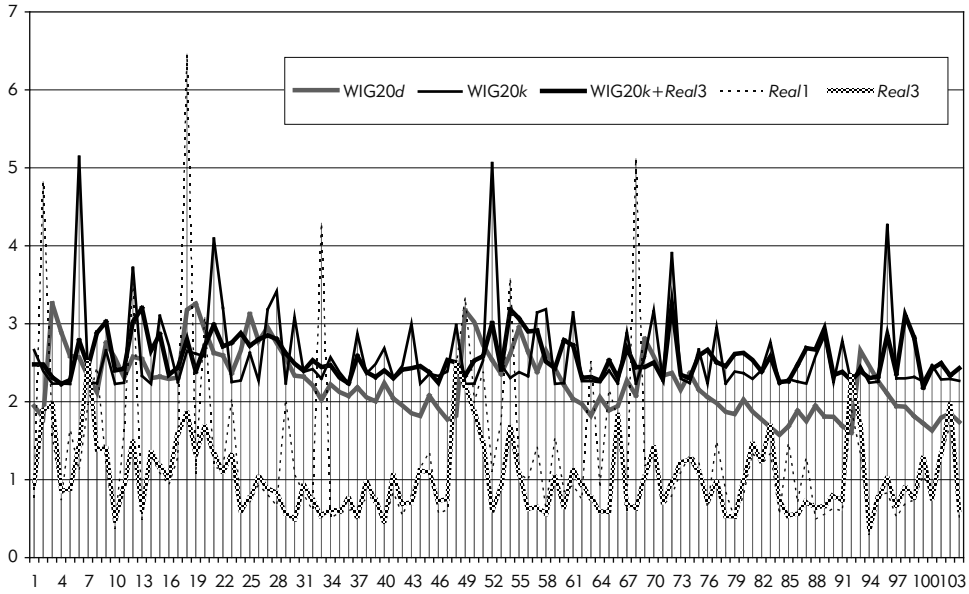


Tabela 6.8. Błędy prognoz i współczynnik R^2 regresji Mincera–Zarnowitza dla prognoz zmienności indeksu WIG20 na podstawie modeli opisanych w tabelach 3.5 i 6.5 (zwroty pięciominutowe)

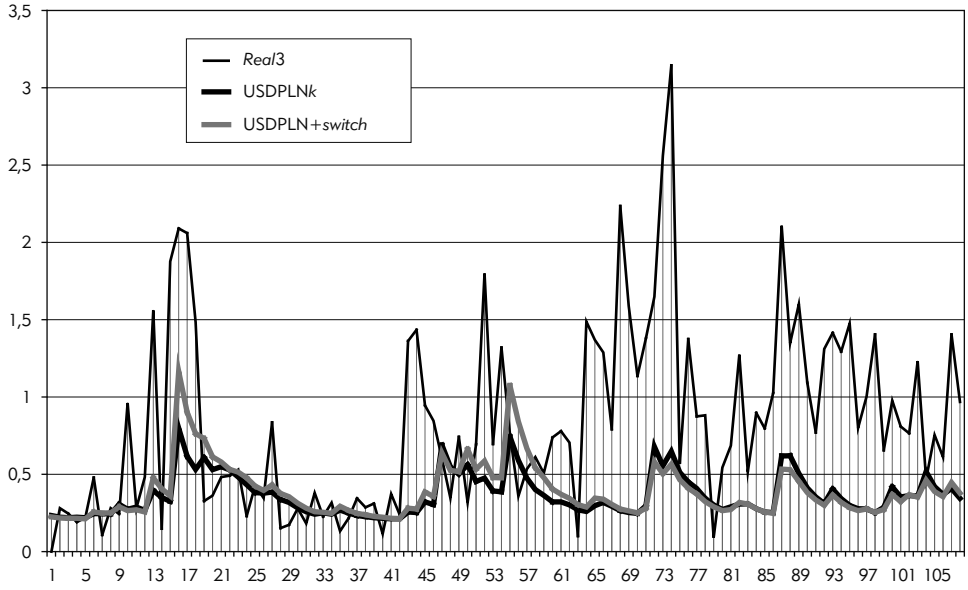
	AR(1)-GARCH(1,1)	**AR-GARCH**	**GARCH(0,4)**	**GARCH(0,4)**	**GARCH(0,4) +*Real*3**	**GARCH(0,4) +*Real*3**
	***Real*1**	***Real*3**	***Real*1**	***Real*3**	***Real*1**	***Real*3**
R^2	0,038	0,042	0,003	0,001	0,03	0,04
MSE	1,9360	1,7880	3,0240	2,9170	2,6600	2,6420
MedSE	1,5180	1,5740	2,4560	2,4540	2,7220	2,5620
ME	– 0,9307	– 1,2150	– 1,2650	– 1,5490	– 1,2640	– 1,5500
MAE	1,2400	1,2490	1,5430	1,5560	1,5170	1,5520
RMSE	1,3910	1.3370	1,7390	1,7080	1,6310	1,6250
MAPE	1,4850	1,5840	1,8650	1,9830	1,9630	2,0810
AMAPE	0,3739	0,3980	0,4190	0,4440	0,4292	0,4575
TIC	0,3518	0,3913	0,4036	0,4528	0,3859	0,4418
LLF	0,8745	0,9175	1,1370	1,1950	1,1830	1,2510

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

W wypadku kursów walutowych mamy nieco inną sytuację niż podczas analizy szeregów giełdowych. Dla wszystkich pięciu rozważanych kursów prognoza zmienności jest przeważnie niedoszacowana. Jednocześnie trzeba zauważyć, że prognozy są lepsze niż to było w wypadku szeregów analizowanych powyżej, zwłaszcza jeśli chodzi o współczynnik determinacji Mincera–Zarnowitza R^2. To, że błędy MSE, MedSe, ME oraz MAE są niższe niż dla indeksu WIG 20, jest spowodowane przede wszystkim niższym poziomem zmienności kursów.

Przedstawione na ilustracji 6.10 wykresy prognoz zmienności kursu USD/PLN i zmienności zrealizowanej *Real*3 (tabela 6.9) pozwalają na wysunięcie tezy, że pierwszych 60 prognoz jest dość trafnych. Przyjęty przez nas okres prognozy na podstawie jednego nieestymowanego ponownie modelu jest długi. Z reguły model reestymuje się co kilkadziesiąt dni.

Ilustracja 6.10. Prognozy zmienności kursu USD/PLN uzyskane za pomocą modeli przedstawionych w tabeli 4.5



Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Tabela 6.9. Błędy prognoz i współczynnik R^2 regresji Mincera–Zarnowitza dla prognoz zmienności kursu USD/PLN na podstawie modeli przedstawionych w tabeli 4.5 (w odniesieniu do zmienności *Real*3)

Model	**GJR(1,1)**+*switch*	**GARCH(1,1)**
Szereg	**USDPLN***d*	**USDPLN***k*
R^2	0,080	0,140
MSE	0,5161	0,5304
MedSE	0,1353	0,1237
ME	0,4301	0,4610
MAE	0,5194	0,5232
RMSE	0,7184	0,7283
AMAPE	0,3629	0,3671
TIC	0,4931	0,5160

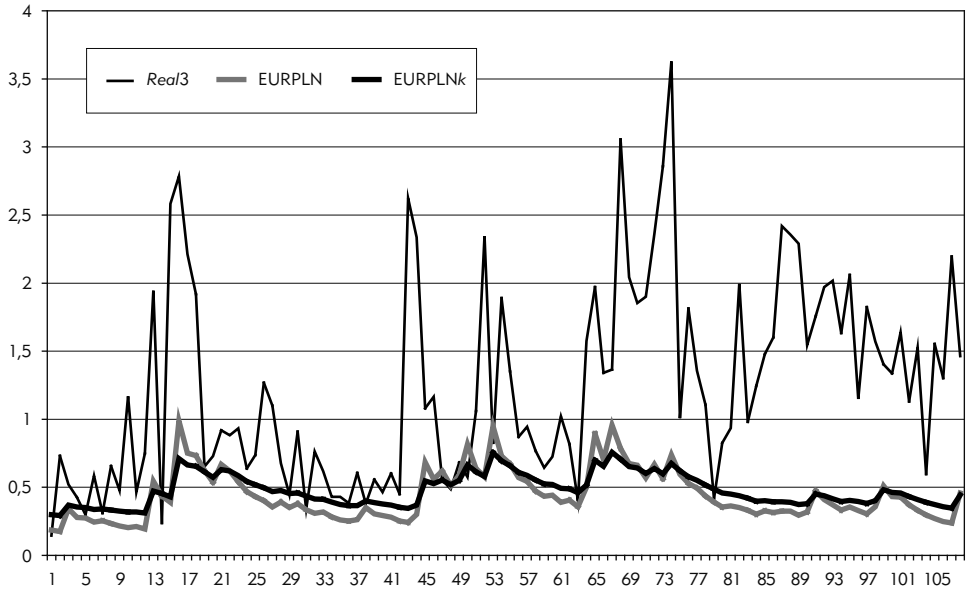
Uzyskane przez nas prognozy zmienności kursu EUR/PLN są gorszej jakości niż dla USD/PLN, choć np. R^2 jest porównywalne (tabela 6.10). Różnica między wynikami dla obu modeli jest niewielka (ilustracja 6.11). Nieco lepszej jakości prognozy daje model GARCH(1,1) dopasowany do krótkiego szeregu zwrotów. Podobnie było dla USD/PLN.

Tabela 6.10. Ocena jakości prognoz zmienności uzyskanych z przedstawionych w tabeli 5.3 modeli dopasowanych do szeregów zwrotów EURPLN*d* i EURPLN*k* (w odniesieniu do zmienności *Real*3)

Model	**FIGARCH(1,*d*,1)**	**GARCH(1,1)**
Szereg	**EURPLN***d*	**EURPLN***k*
R^2	0,12	0,09
MSE	1,0900	1,0520
MedSE	0,3460	0,3000
ME	0,7871	0,7488
MAE	0,8001	0,7641
RMSE	1,0440	1,0260
MAPE	0,5523	0,5072
AMAPE	0,4112	0,3664
TIC	0,5475	0,5335
LLF	1,2100	0,9714

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 6.11. Prognozy zmienności kursu EUR/PLN uzyskane za pomocą modeli przedstawionych w tabeli 5.3



Podsumowując przedstawione w tym rozdziale przykłady (podrozdziały 6.3.1 i 6.6) musimy stwierdzić, że choć zastosowanie zmienności zrealizowanej poprawia jakość prognoz, to jednak nie zawsze wyniki są takie, jakie chcielibyśmy uzyskać. Prognozowania opiera się bowiem zwykle na założeniu, że przyszłość, choć w pewnym stopniu, będzie podobna do przeszłości i w związku z tym modele oszacowane na podstawie danych z przeszłości okażą się użyteczne. Rzeczywistość nie zawsze dostosowuje się do naszych oczekiwań. Ludzie zajmujący się modelowaniem i prognozowaniem często powtarzają opinię: prognozowanie jest sztuką mówienia, jak będzie i wyjaśniania, dlaczego tak nie było. Sens stosowania modeli i prognozowania (często bardzo niedoskonałego) za ich pomocą polega na tym, że stosując model, możemy też ocenić prawdopodobieństwo wielkości popełnianych błędów. Zachowujemy w ten sposób pewną kontrolę nad nieuchronnym ryzykiem związanym z funkcjonowaniem rynków finansowych.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

6.6. Uwagi

Zastanówmy się przez chwilę nad ideą, która kryje się za propozycją Andersena i Bollersleva. Na pierwszy rzut oka, rozważania zawarte w ich pracy (Andersen i Bollerslev 1998) mogą wydawać się dziwne. Uzyskujemy złej jakości prognozy, więc zamiast pracować nad metodami prognozowania, zmieniamy wielkości, z którymi porównujemy te prognozy. Trzeba jednak uświadomić sobie, że wariancja warunkowa jest wielkością nieobserwowalną i że oceniając jakość prognozy, zawsze porównujemy ją tylko z wartością pewnego estymatora zmienności. Pomysł Andersena i Bollersleva sprowadza się zatem do tego, by jak najtrafniej wybrać estymator zmienności, z którym będziemy porównywać prognozy. Jeśli oszacowania zmienności uzyskane za pomocą różnych metod (np. zmienność zrealizowana i oszacowania z modelu GARCH) są bliskie, możemy mieć większą pewność, że obie wielkości są również bliskie prawdziwej nieobserwowalnej wartości wariancji warunkowej.

Badania nad zmiennością zrealizowaną wiążą się nieodłącznie z analizą szeregów finansowych o ultrawysokiej częstotliwości, należącą do głównego nurtu ekonometrii finansowej. Wśród badaczy zajmujących się tymi zagadnieniami można wyróżnić dwie dominujące grupy. Jedna z nich skupiona jest wokół Andersena i Bollersleva, a drugą kierują Barndorff–Nielsen i Shephard.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

7

Modele dwuliniowe

W tym rozdziale przedstawiamy modele, które pojawiły się wcześniej niż modele GARCH, opisują podobne zachowania, ale zostały przez modele GARCH prawie całkowicie wyparte. Są one jednak interesujące po pierwsze jako ilustracja faktu, że to samo zjawisko można opisać na wiele różnych sposobów, a po drugie dlatego, że wprowadzają zależności nieliniowe także do równania średniej warunkowej. Modele te noszą nazwę modeli dwuliniowych.

Modele dwuliniowe po raz pierwszy rozważane były w pracach Grangera i Andersena (1978) oraz Subby Rao (1981). Jako szczególne przypadki obejmują one liniowy model średniej ruchomej (MA) oraz liniowy model autoregresyjny (AR). Na model dwuliniowy można również patrzeć jak na model ARMA ze zmieniającymi się w czasie współczynnikami części autoregresyjnej. Modele dwuliniowe mogą stanowić alternatywny w stosunku do modeli GARCH aparat modelujący zgrupowania zmienności występujące w szeregach stóp zwrotu instrumentów finansowych. Może to być przyczyną błędnych specyfikacji: modele GARCH są przyjmowane zamiast modeli dwuliniowych i na odwrót (Weiss 1986). Z punktu widzenia teorii modeli nieliniowych, ważność klasy modeli dwuliniowych polega na tym, że za ich pomocą można, na danym skończonym przedziale czasu, aproksymować z dowolną dokładnością każdy dynamiczny model nieliniowy (Brockett 1976).

Będziemy rozważać grupę modeli dwuliniowych, w których zaburzenie może być procesem warunkowo heteroskedastycznym opisywanym przez model GARCH.

7.1. Charakterystyka modeli dwuliniowych

Model dwuliniowy w ogólnej postaci dany jest za pomocą równania:

$$r_t = a_0 + \sum_{j=1}^{m} b_{0j} u_{t-j} + \sum_{i=1}^{p} \left(a_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} u_{i-j} \right) r_{t-i} + u_t \tag{7.1}$$

gdzie zazwyczaj zakłada się, że u_t jest białym szumem z zerową średnią.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Kowariancyjna stacjonarność procesu opisanego równaniem (7.1), przy założeniu, że zmienne u_t są niezależne i mają jednakowy rozkład, dla którego istnieją wszystkie momenty, może być opisana przez układ dość złożonych ograniczeń nałożonych na parametry (Tong 1990).

Będziemy rozważać modele dwuliniowe o następującej specyfikacji:

$$a(L)\, r_t = a_0 + \left(\lambda(L)\, u_{t-1}\right)\left(\psi(L)\, r_{t-1}\right) + \theta(L)\, u_t \tag{7.2}$$

gdzie:

$$a(L) \equiv 1 - a_1 L - \ldots - a_p L^p, \quad \lambda(L) \equiv 1 + \lambda_1 L + ... + \lambda_{r-1} L^{r-1},$$
$$\psi(L) \equiv \psi_1 + \psi_2 L + \ldots + \psi_p L^{p-1} \quad \text{oraz} \quad \theta(L) \equiv 1 - \theta_1 L - \ldots - \theta_q L^q$$

O zmiennych u_t zakładamy, że tworzą biały szum o zerowej średniej i wariancji σ^2; w szczególności mogą być modelowane za pomocą modeli klasy GARCH. W takiej sytuacji mówimy o modelach BL-GARCH. Model dwuliniowy jest naturalnym uogólnieniem modelu ARMA(p,q) otrzymywanego z równania (7.2), gdy wielomian $\psi(L)$ jest zerowy. O ile jednak inne tego typu uogólnienie, standardowe modele ARMA-GARCH, wprowadzają nieliniowość w wariancji warunkowej, o tyle w wypadku modelu dwuliniowego struktura nieliniowa pojawia się również w średniej warunkowej. Znaczenie specyfikacji dwuliniowej bierze się zatem z faktu, że może ona służyć do modelowania nieliniowości w średniej za pomocą stosunkowo prostej struktury algebraicznej, jaką jest wielomian stopnia drugiego. Modele dwuliniowe są jednak rzadziej stosowane niż inne omawiane w tej pracy typy modeli. Być może jest to związane z tym, że w badaniach empirycznych trudno jest odróżnić procesy dwuliniowe od procesów opisywanych przez bardzo popularne modele ARMA-GARCH (Weiss 1986).

7.2. Modele dwuliniowe a zgrupowania zmienności

Znaczenie modeli dwuliniowych wynika między innymi z faktu, że mogą one, w inny sposób niż omówione w poprzednim rozdziale modele GARCH, wyjaśniać zjawisko zgrupowań zmienności w szeregach stóp zwrotu instrumentów finansowych, wiązane zwykle z faktem występowania autokorelacji w kwadratach zwrotów, czyli z efektem ARCH.

Przypuśćmy, że kowariancyjnie stacjonarny szereg r_t, może być opisany za pomocą prostego modelu dwuliniowego:

$$r_t = \psi_2 r_{t-2} u_{t-1} + u_t \tag{7.3}$$

gdzie u_t jest gaussowskim białym szumem z wariancją σ^2 oraz $\sigma^2\psi_2^2 < 1$.

Wtedy wartość oczekiwana zmiennej r_t jest równa zeru oraz:

$$r_t^2 = \psi_2^2 r_{t-2}^2 u_{t-1}^2 + 2\psi_2^2 r_{t-2} u_{t-1} u_t + u_t^2 \tag{7.4}$$

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Zatem:

$$E(r_t^2) = \psi_2^2 E(r_{t-2}^2)E(u_{t-1}^2) + 2\psi_2 E(r_{t-2}u_{t-1}u_t) + E(u_t^2) = \frac{\sigma^2}{1-\sigma^2\psi_2^2} \tag{7.5}$$

Ostatnia równość wynika z niezależności zmiennych u_{t-1} i r_{t-k} dla $k \geq 2$, założenia kowariancyjnej stacjonarności procesu r_t oraz z dającej się bezpośrednio sprawdzić równości $E(r_t r_{t-1}) = 0$. Ogólnie, można sprawdzić, że szereg r_t jest białym szumem. Jednakże kwadraty zmiennych r_t są skorelowane. Mamy bowiem:

$$E(r_t^2 r_{t-k}^2) = \psi_2^2 E(r_{t-2}^2 r_{t-k}^2 u_{t-1}^2) + \frac{\sigma^4}{1-\psi_2^2\sigma^2} \tag{7.6}$$

dla $k = 1, 2, \ldots$. Stąd dla $k = 1$ dostajemy:

$$E(r_t^2 r_{t-1}^2) = \frac{3\psi_2^2\sigma^6}{(1-\psi_2^2\sigma^2)^2} + \frac{\sigma^4}{1-\psi_2^2\sigma^2} \text{ i } \operatorname{cov}(r_t^2, r_{t-1}^2) = \frac{2\sigma^6\psi_2^2}{(1-\sigma^2\psi_2^2)^2} \tag{7.7}$$

Natomiast dla $k \geq 2$:

$$E(r_t^2 r_{t-k}^2) = \psi_2^2\sigma^2 E(r_{t-2}^2 r_{t-k}^2) + \frac{\sigma^4}{1-\psi_2^2\sigma^2} \tag{7.8}$$

$$\operatorname{cov}(r_t^2, r_{t-k}^2) = \psi_2^2\sigma^2\operatorname{cov}(r_{t-2}^2 r_{t-k}^2)$$

Z równości (7.6)–(7.8) wynika, że zmienne r_t^2 są dodatnio szeregowo skorelowane przy wszystkich opóźnieniach. Dokładniej mówiąc:

$$\operatorname{cov}(r_t^2, r_{t-1}^2) = \frac{2\sigma^6\psi_2^2}{(1-\sigma^2\psi_2^2)^2}$$

$$\operatorname{cov}(r_t^2, r_{t-2}^2) = \sigma^2\psi_2^2\operatorname{var}(r_t^2)$$

$$\operatorname{cov}(r_t^2, r_{t-3}^2) = \frac{2\sigma^8\psi_2^4}{(1-\sigma^2\psi_2^2)^2}$$

$$\operatorname{cov}(r_t^2, r_{t-4}^2) = \sigma^4\psi_2^4\operatorname{var}(r_t^2)$$

Wyliczając z równości (7.4) wariancję warunkową zmiennej r_t^2 pod warunkiem informacji dostępnej do okresu $t-2$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} E(r_t^2 \mid \mathcal{F}_{t-2}) &= E(\psi_2^2 r_{t-2}^2 u_{t-1}^2 + 2\psi_2^2 r_{t-2}u_{t-1}u_t + u_t^2 \mid \mathcal{F}_{t-2}) = \\ &= \sigma^2 + (1 + \psi_2^2 r_{t-2}^2) \end{aligned} \tag{7.9}$$

Wariancja warunkowa jest zatem funkcją opóźnionych wartości procesu.

Powyższy przykład pokazuje mechanizm, za pomocą którego procesy dwuliniowe mogą generować zgrupowania zmienności w modelowanych szeregach czasowych. Powoduje to, że w badaniach empirycznych procesy dwuliniowe bywają czasami mylone z procesami GARCH.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

7.3. Od teorii do praktyki

Podstawową wątpliwością pojawiającą się przy stosowaniu modeli dwuliniowych jest to, że bardzo często oszacowania tych spośród ich parametrów, które decydują o faktycznej nieliniowości (w naszym wypadku ψ_1, ψ_2, λ_1), są nieistotne. Jednak oszacowania zmienności w próbie otrzymywane za pomocą specyfikacji BL-GARCH ze standardowym modelem GARCH(1,1) są dość dobrej jakości (gdy zestawiamy je ze zmiennością zrealizowaną), a jakość prognoz zmienności jest porównywalna z jakością prognoz otrzymanych za pomocą modeli GARCH z bardziej rozbudowaną strukturą.

W przedstawianych tu przykładach estymujemy modele, których równanie jest następujące:

$$r_t = a_0 + a_1 r_{t-1} + (u_{t-1} + \lambda_1 u_{t-2})(\psi_1 r_{t-1} + \psi_2 r_{t-2}) + u_t \qquad (7.10)$$

przy czym dla błędu u_t w ramach procedury jednostopniowej szacujemy jeszcze model GARCH.

Tabele 7.1 i 7.2 zawierają oszacowania parametrów modeli dwuliniowych dopasowanych do szeregów zwrotów indeksów WIG i WIG20. Modele opisujące długie szeregi zwrotów indeksów WIG*d* i WIG20*d* mają istotne oszacowania parametrów decydujących o nieliniowości w średniej.

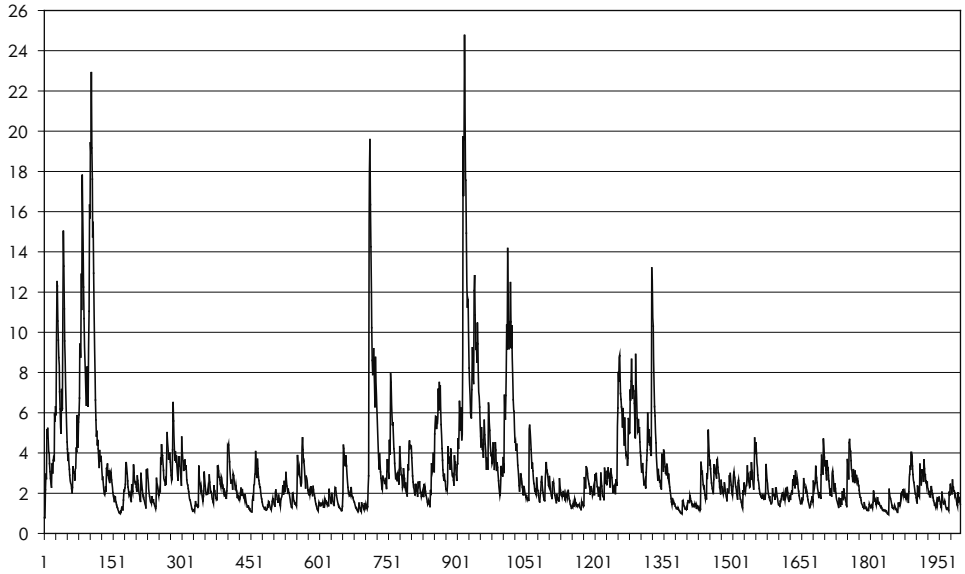
Na ilustracjach 7.1–7.4 przedstawione są oszacowania zmienności w próbie oraz prognozy dla indeksów WIG i WIG20. Łatwo z nich odczytać, że modele dwuliniowe przeszacowują zmienność. Potwierdzają to wartości błędów prognozy przedstawione w tabeli 7.3.

Tabela 7.1. Oszacowania parametrów modeli BL-GARCH dopasowanych do szeregów zwrotów indeksów WIG i WIG20

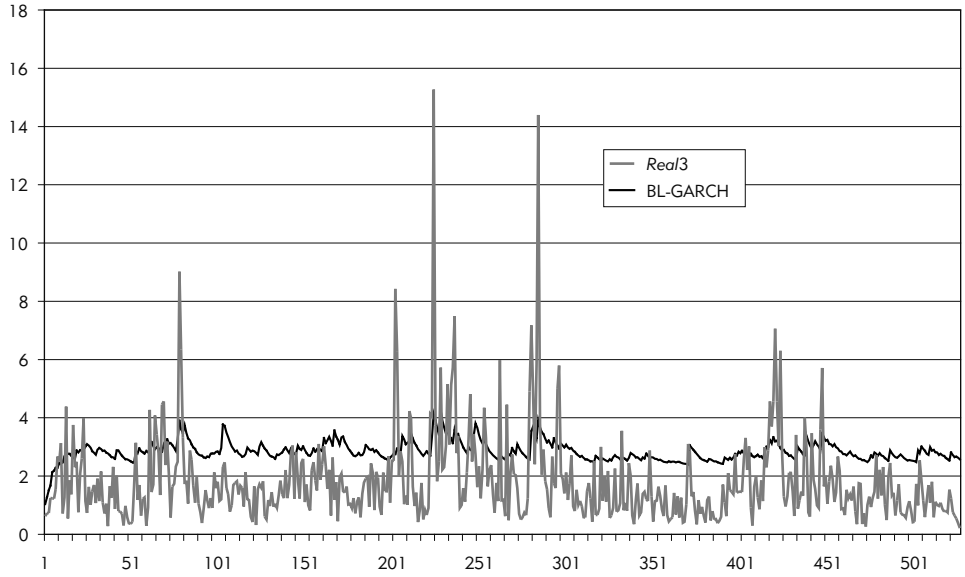
Szereg	**WIG*d***	**WIG20*d***	**WIG20*k***
Rozkład błędu	***t* Studenta**	***t* Studenta**	***t* Studenta**
a_0	–	–	– 0,0808 (0,0862)
a_1	0,1680 (0,0252)	0,0687 (0,0239)	0,0698 (0,0412)
a_2	–	–	– 0,0147 (0,0438)
ψ_1	0,0217 (0,0100)	0,0258 (0,0104)	– 0,0074 (0,0177)
ψ_2	–	–	0,0700 (0,0219)
λ_1	–	0,7257 (0,3611)	–
ω	0,7863 (0,1507)	1,1352 (0,2080)	0,4175 (0,2995)
α_1	0,1297 (0,0172)	0,1269 (0,0159)	0,0344 (0,0302)
β_1	0,8280 (0,0350)	0,8310 (0,0316)	0,8202 (0,0964)
DF	7,7690	8,2237	9,2076

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 7.1. WIG*d*. Zmienność w próbie wyestymowana za pomocą modelu BL-GARCH



Ilustracja 7.2. WIG20*k*. Zmienność w próbie wyestymowana za pomocą modelu BL-GARCH oraz zmienność zrealizowana *Real*3

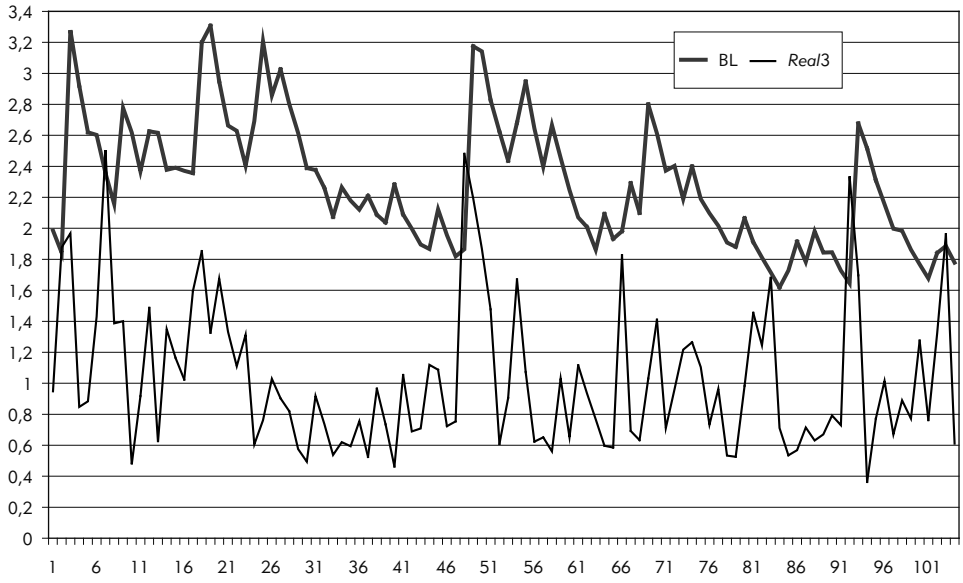


Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Tabela 7.2. Ocena jakości prognoz zmienności uzyskanych za pomocą modeli opisanych w tabeli 7.1

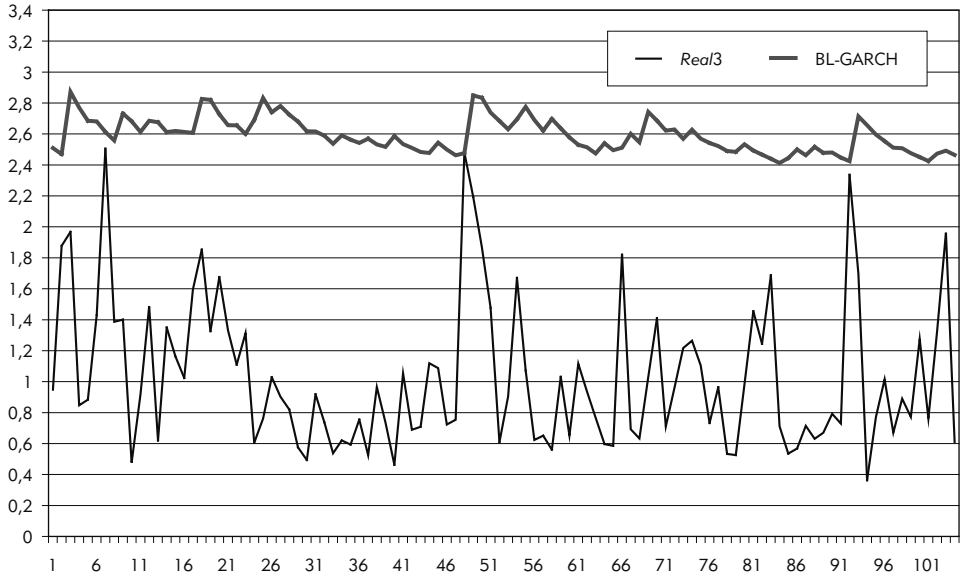
Szereg	WIG*d*	WIG20*d*	WIG20*k*
R^2	0,002	0,04	0,04
MSE	0,9769	1,8959	2,7099
MedSE	0,7429	1,7028	2,9570
ME	– 0,8936	– 1,2575	– 1,5798
MAE	0,9157	1,2876	1,5798
RMSE	0,9884	1,3769	1,6462
MAPE	1,7482	1,6318	2,0218
AMAPE	0,4198	0,4049	0,4557
TIC	0,4248	0,3980	0,4391
LLF	1,0276	0,9506	1,2213

Ilustracja 7.3. WIG20. Prognozy zmienności uzyskane za pomocą modelu BL-GARCH dopasowanego do długiego szeregu zwrotów WIG20*d*. Okres 2.01.2003–30.05.2003



Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 7.4. WIG20. Prognozy zmienności uzyskane za pomocą modelu BL-GARCH dopasowanego do krótkiego szeregu zwrotów WIG20k. Okres 2.01.2003–30.05.2003



W wypadku kursu USD/PLN (tabela 7.3) uzyskaliśmy wyniki mniej zadowalające. Otrzymaliśmy sensowne dopasowanie modelu, gorzej było z istotnością oszacowań parametrów związanych z nieliniowością. Interesujący jest fakt, że dla szeregu USDPLN*d* najbardziej adekwatnym modelem opisującym reszty okazał się model TARCH(1,1) (por. podrozdział 4.1.2). Jakość prognoz (ilustracja 7.5 i tabela 7.4) jest porównywalna z jakością prognoz uzyskiwanych za pomocą modeli GARCH.

Tabela 7.3. Oszacowania parametrów modeli BL-GARCH dla szeregów zwrotów kursu walutowego USD/PLN

Szereg	**USDPLN*d***	**USDPLN*k***
Rozkład błędu	***t* Studenta**	***t* Studenta**
a_0	0,0304 (0,0104)	–0,0553 (0,0236)
α_1	0,0126 (0,0669)	0,0088 (0,0564)
ψ_1	–0,0433 (0,0364)	0,0679 (0,0420)
λ_1	–0,2193 (0,7020)	–
ω	0,0754 (0,0169)	0,2085 (0,0363)
α_1	0,2576 (0,0326)	0,1558 (0,0735)
β_1	0,7654 (0,0623)	0,6917 (0,1128)
γ_1	–0,4512 (0,1120)	–
DF	5,7202	7,2733

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 7.5. Prognozy zmienności kursu walutowego USD/PLN otrzymane za pomocą modeli BL-GARCH dopasowanych do szeregów zwrotów USDPLN*d* i USDPLN*k* oraz zmienność zrealizowana. Okres 2.01.2003–30.05.2003

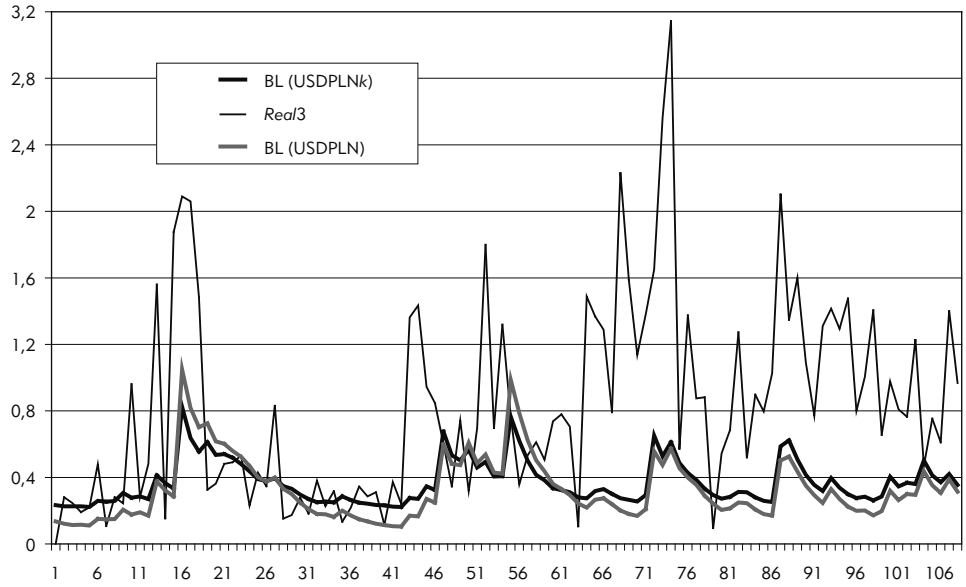


Tabela 7.4. Ocena jakości prognoz zmienności uzyskanych za pomocą modeli opisanych w tabeli 7.3

Szereg	USDPLN*d*	USDPLN*k*
R^2	0,0845	0,13
MSE	0,5763	0,5283
MedSE	0,1605	0,1268
ME	0,4973	0,4562
MAE	0,5587	0,5207
RMSE	0,7591	0,7269
MAE	–	–
AMAPE	0,4236	0,3638
TIC	0,5415	0,5137
LLF	–	–

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

7.4. Uwagi

Jak już wspomniano wcześniej, modele dwuliniowe zostały skutecznie wyparte z praktycznych zastosowań przez modele GARCH. Niemniej mają one swoich zwolenników i ciągle pojawiają się w badaniach. Nieco informacji na ich temat znaleźć można w książce Tsaya (2005).

Wydaje się, że modele BL-GARCH ze względu na bogatszy opis średniej warunkowej, jakiego mogą dostarczyć dzięki występującym w jej specyfikacji zależnościom nieliniowym, mają szansę być skuteczniejszym narzędziem szacowania wartości zagrożonej. Jest to powszechnie stosowana miara ryzyka inwestycji finansowych, o której piszemy w rozdziale 9.

Zastosowania modeli BL-GARCH do opisu szeregów obserwacji z polskiego rynku finansowego można znaleźć na przykład w pracach (Bruzda 2003, Doman i Doman 2004, 2005).

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

8

Modele zmienności stochastycznej

Kolejna rozważana przez nas klasa modeli, modele zmienności stochastycznej (*stochastic volatility* – SV), podobnie jak klasa przedstawiona w poprzednim rozdziale, stanowi bezpośrednią konkurencję dla modeli GARCH. Ma ona nad nimi tę przewagę, że – jak to wyjaśniamy dokładniej dalej – jest dobrze powiązana z teoretycznymi modelami matematyki finansowej i nie można jej zarzucić braku znaczenia dla rozwoju teorii, co czasami czyni się w stosunku do modeli GARCH.

W modelach GARCH zarówno wariancja warunkowa, jak i średnia warunkowa obserwowanego szeregu czasowego y_t zależą od tego samego ciągu zaburzeń. Ponadto wariancja warunkowa σ_t^2 jest mierzalna względem σ-ciała generowanego przez historię procesu do momentu $t-1$ włącznie (intuicyjnie, zbiór informacji o procesie). Oznacza to, że przy danym zbiorze $\mathcal{F}_{t-1}$, σ_t^2 jest funkcją deterministyczną. Konkurencyjna klasa, modeli zmienności stochastycznej (SV), różni się przyjęciem założenia, że zmienność σ_t^2 podlega dodatkowemu równoczesnemu zaburzeniu i wobec tego nawet przy danym zbiorze informacji $\mathcal{F}_{t-1}$ nie jest wielkością deterministyczną. Modele SV mają swój początek zarówno w finansach matematycznych, jak i w ekonometrii finansowej.

Jednym z istotnych mankamentów ciągle jeszcze powszechnie stosowanego w finansach przez praktyków modelu Blacka–Scholesa wyceny opcji europejskiej jest nierealistyczne założenie o stałości parametru zmienności. Fakt ten był głównym powodem wprowadzenia przez Hulla i White'a (1987) modelu wyceny opcji, w którym zmienność jest procesem stochastycznym z czasem ciągłym. Model SV jest wersją modelu Hulla–White'a odpowiadającą czasowi dyskretnemu.

Obecność dodatkowego procesu innowacji istotnie zwiększa elastyczność modelu SV w zakresie opisywania ewolucji zmienności σ_t^2 w porównaniu z modelami klasy GARCH. Z drugiej jednak strony, okoliczność ta bardzo utrudnia estymację parametrów i obliczanie prognoz zmienności. Przegląd prac obrazujących rozwój badań związanych z modelami zmienności stochastycznej zawarty

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

jest między innymi w artykule, którego autorami są Ghysels, Harvey i Renault (1996). Przyjmuje się, że historia procesów zmienności stochastycznej jest dłuższa niż modeli GARCH i że po raz pierwszy tego typu proces pojawił się w pracy Clarka (1973) opisującej zwroty jako funkcję losowego napływu informacji.

8.1. Charakterystyka modeli zmienności stochastycznej

Niech r_t oznacza procentowy zwrot logarytmiczny z rozważanego instrumentu finansowego. Przy modelowaniu zmienności za pomocą modeli SV będziemy badać jedynie szereg $y_t = r_t - \mu_t$, gdzie $\mu_t = \mathrm{E}(r_t \mid \mathcal{F}_{t-1})$ jest średnią warunkową, przy czym $\mathcal{F}_{t-1}$ oznacza zbiór informacji na temat r_t dostępnych do dnia $t-1$ włącznie. W wypadku danych empirycznych średnia warunkowa jest często pomijana jako nieistotna lub modeluje się ją jako stacjonarny proces ARMA(p,q).

W celu zapewnienia poprawnego określenia wariancji warunkowej ($\sigma_t^2 > 0$), zamiast samej zmienności σ_t^2 modeluje się jej logarytm σ_t^2.

specyfikacja modelu SV

Podstawowy model SV wprowadzony przez Melino i Turnbulla (1990) oraz Taylora (1990) określony jest równaniami:

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t \tag{8.1}$$

$$\sigma_t^2 = \sigma^{\#2} \exp(h_t) \tag{8.2}$$

$$h_t = \phi h_{t-1} + \sigma_\eta \eta_t \tag{8.3}$$

gdzie ε_t i η_t mają standardowy rozkład normalny oraz są szeregowo i wzajemnie niezależne.

Zmienność σ_t^2 jest więc nie tylko funkcją elementów zbioru informacji $\mathcal{F}_{t-1}$, ale zależy również od dodatkowych zaburzeń η_t.

Heurystyczna interpretacja modelu SV jest taka, że zmienne η_t reprezentują zaburzenia intensywności napływu nowych informacji, mierzonej przez σ_t, natomiast ε_t reprezentują zaburzenia związane z treścią nowych informacji.

Jeśli $|\phi| < 1$, to h_t jest stacjonarnym procesem AR(1), przy czym $h_t \sim N\left(0, \frac{\sigma_\eta^2}{1-\phi^2}\right)$. Zatem σ_t^2 ma rozkład log-normalny ze średnią:

$$E(\sigma_t^2) = \sigma^{\#2} \exp\left(\frac{\sigma_\eta^2}{2(1-\phi^2)}\right) \tag{8.4}$$

Parametrom modelu można nadać pewne interpretacje. Bliska 1 wartość bezwzględna parametru ϕ świadczy o persystencji zmienności. Duże wartości

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

parametru skalującego $\sigma^{\#2}$ wskazują na wysoki poziom zmienności. Małe wartości ϕ przy jednocześnie dużym σ_η^2 implikują niską prognozowalność procesu.

model Blacka–Scholesa

Ideę modeli zmienności stochastycznej można wywieść z uogólnień modelu Blacka–Scholesa. W klasycznym modelu Blacka–Scholesa wyceny opcji europejskiej zakłada się, że proces S_t ceny akcji jest opisany stochastycznym równaniem różniczkowym:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \tag{8.5}$$

gdzie $\mu \in \mathbb{R}$ reprezentuje oczekiwaną stopę zwrotu z akcji, $\sigma > 0$ jest współczynnikiem zmienności, a W_t jest jednowymiarowym standardowym ruchem Browna.

Inaczej mówiąc, proces ceny, S_t, jest modelowany za pomocą geometrycznego ruchu Browna. Przy przejściu do obserwacji dyskretnych oznacza to, że zwroty logarytmiczne $\ln(S_t / S_{t-1})$ są niezależne i mają jednakowy rozkład normalny.

model zmienności stochastycznej z czasem ciągłym

Większość faktów empirycznych wskazywała jednak, że założenie powyższe jest nierealistyczne. W związku z tym, w kontekście czasu ciągłego, zaczęto rozważać uogólniony model Blacka–Scholesa zwany również modelem zmienności stochastycznej. Opisany jest on przez układ stochastycznych równań różniczkowych:

$$dS_t = \mu(S_t, t)dt + \sigma_t S_t dW_t^{(1)} \tag{8.6}$$

$$d\sigma_t^2 = a(\sigma_t^2)dt + \eta_1(\sigma_t^2)dW_t^{(1)} + \eta_2(\sigma_t^2)dW_t^{(2)} \tag{8.7}$$

gdzie $W_t^{(1)}$ i $W_t^{(2)}$ są standardowymi jednowymiarowymi ruchami Browna.

Równanie (8.7) można interpretować w ten sposób, że – poza procesem $W_t^{(1)}$ – na system wpływa jeszcze dodatkowe źródło losowości $W_t^{(2)}$, a zmienność natychmiastowa σ_t^2 jest sama procesem dyfuzji. Funkcja η_1 modeluje korelację natychmiastową między procesami $\ln S_t$ a σ_t^2.

Szczególnym przypadkiem modelu opisanego równaniami (8.6)–(8.7) jest model Hulla–White'a (1987) określony przez układ:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma_t S_t dW_t^{(1)} \tag{8.8}$$

$$d\sigma_t^2 = a\sigma_t^2 dt + b\sigma_t^2 dW_t^{(2)} \tag{8.9}$$

gdzie zakłada się, że procesy ruchu Browna $W_t^{(1)}$ i $W_t^{(2)}$ są niezależne.

Odpowiednikiem modelu (8.8)–(8.9) dla procesów z czasem dyskretnym jest model:

$$\ln(S_t / S_{t-1}) = \mu_t + \sigma_t \varepsilon_t \tag{8.10}$$

$$\ln\sigma_t^2 = \alpha + \phi \ln\sigma_{t-1}^2 + \sigma_\eta \eta_t \tag{8.11}$$

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

w którym procesy ε_t, η_t są wzajemnie niezależne oraz ε_t, η_t ~iid $N(0,1)$. Model ten jest równoważny z modelem SV zdefiniowanym równaniami (8.1)–(8.3).

Wykazany wyżej naturalny związek modeli SV ze stosowanymi w matematyce finansowej modelami dyfuzji (8.6)–(8.7) stanowi silny argument na rzecz traktowania modeli SV jako narzędzia dostarczającego opisu ewoluującej w czasie zmienności, który jest adekwatny w stopniu co najmniej takim, jak opis otrzymany za pomocą modeli klasy GARCH.

model SV z dodatkowymi zmiennymi objaśniającymi

Standardowy model SV (8.1)–(8.3) można rozszerzyć, wprowadzając do równania logarytmicznej zmienności dodatkowe zmienne objaśniające.

Jedną z możliwych specyfikacji jest model SVX_k, w którym równanie (8.3) przyjmuje postać:

$$h_t = \phi\, h_{t-1} + \gamma(1 - \phi L)x_{t-k} + \sigma_\eta \eta_t \tag{8.12}$$

gdzie η_t ~iid $N(0,1)$, a L oznacza operator opóźnienia.

Specyfikacja warunków początkowych dla procesu logarytmicznej zmienności modelu SVX_k zakłada, że nieobserwowalne wielkości x_{1-k} są stałe i znane. Zatem $h_1 \sim N\left(\gamma\, x_{1-k}, \dfrac{\sigma_\eta^2}{1-\phi^2}\right)$.

Można również rozważać ograniczony model SVX_k, nakładając warunek $\phi = 0$. Model ten, w którym równanie logarytmicznej zmienności (8.12) przybiera postać:

$$h_t = \gamma\, x_{t-k} + \sigma_\eta \eta_t \tag{8.13}$$

będziemy oznaczać przez $SVRX_k$.

8.2. Estymacja modelu SVX

Obecność innowacji $\sigma_\eta \eta_t$ ułatwia dopasowanie modelu SV do danych empirycznych, ale, z drugiej strony, fakt ten znacznie utrudnia estymację parametrów. Ponieważ σ_t^2 nie da się zrekonstruować na podstawie historii procesu zwrotów, nie można bezpośrednio stosować standardowych technik metody największej wiarygodności. Spowodowało to, że jeszcze do niedawna modele SV, mimo ich niewątpliwej metodologicznej atrakcyjności, stosunkowo rzadko były wykorzystywane w badaniach empirycznych.

Ogólnie, techniki stosowane przy estymacji modeli SV można podzielić na dwie grupy, w zależności od podejścia do konstrukcji funkcji wiarygodności. Techniki należące do pierwszej grupy mają na celu konstrukcję pełnej funkcji

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

wiarygodności. Metody należące do grupy drugiej – nie wykorzystują funkcji wiarygodności lub opierają się na jej aproksymacji. Do grupy tej należą metody zaproponowane przez Taylora (1994) oraz Harveya, Ruiz i Shepharda (1994). Intensywny rozwój metod opartych na wykorzystaniu pełnej funkcji wiarygodności nastąpił w latach 90. Najważniejsze z otrzymanych wyników opisane są w pracach Jacquiera, Polsona i Rossiego (1994), Kima, Shepharda i Chiba (1998), Sandmanna i Koopmana (1998) oraz Fridmana i Harrisa (1998).

podejście Koopmana i Hol

Koopman i Hol (Hol 2003) zasugerowali podejście oparte na zastosowaniu losowania z funkcją ważności (Osiewalski 2001) do niegaussowskich i nieliniowych modeli przestrzeni stanów (Durbin i Koopman 2001). Metody te zostały zaproponowane w pracach Shepharda i Pitta (1997) oraz Durbina i Koopmana (1997, 2000). Przy tym ujęciu, klasy modeli SV oraz modeli SVX mogą być traktowane jako szczególne przypadki nieliniowych modeli przestrzeni stanów (Durbin i Koopman 2001).

Wprowadźmy oznaczenia $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_T)'$, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_T)'$, gdzie T jest liczbą obserwacji, $\theta_t = \gamma^* + h_t$ i $\gamma^* = \ln(\sigma^{\#2})$. Zatem, wobec specyfikacji (8.1)–(8.2), $\sigma_t^2 = \exp(\theta_t)$. Zakładamy, że zmienność logarytmiczna h_t spełnia warunek (8.12). Jeśli przez $\boldsymbol{\psi}$ oznaczymy wektor parametrów niewłączonych do wektora stanu określonego poniżej, to model SVX określony wzorami (8.1), (8.2) i (8.12) dany jest za pomocą gęstości:

$$p(y \mid \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi}) = \prod_{t=1}^{T} N(0, \sigma_t^2) \tag{8.14}$$

Symbol $N(0, \sigma_t^2)$ oznacza tu, jak zwykle, gęstość rozkładu normalnego o średniej 0 i wariancji σ_t^2.

Wektor stanu jest dany wzorem $\boldsymbol{\alpha}_t = (\gamma^*, \gamma, h_t)'$, przy czym $\theta_t = (1, 0, 1)\boldsymbol{\alpha}_t$. Równanie przejścia dla wektora stanu ma postać:

$$\boldsymbol{\alpha}_{t+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x_t^* & \phi \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_\eta \end{pmatrix} \eta_{t+1} \tag{8.15}$$

gdzie $x_t^* = (1 - \phi L) x_t = x_t - \phi x_{t-1}$, a zaburzenia η_t są niezależne i mają standardowy rozkład normalny. Początkowy wektor stanu $\boldsymbol{\alpha}_1$ określony jest przez warunek:

$$\begin{pmatrix} \gamma^* \\ \gamma \\ h_1 \end{pmatrix} \sim N\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} \kappa & 0 & 0 \\ 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\eta^2 / \left(1 - \phi^2\right) \end{bmatrix} \right\} \tag{8.16}$$

dla pewnej dowolnie dużej wartości κ. Wariancja h_1 jest zatem równa bezwarunkowej wariancji stacjonarnego procesu AR(1) modelującego h_t.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Wektor parametrów $\boldsymbol{\psi}$ określony jest jako:

$$\boldsymbol{\psi} = \begin{pmatrix} \phi \\ \sigma_\eta \\ \sigma_\varepsilon \end{pmatrix} \tag{8.17}$$

Gęstość warunkowa wektora $\mathbf{y}$ przy danym $\boldsymbol{\theta}$ ma zatem postać:

$$p(y \mid \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi}) = \prod_{t=1}^{T} N(0, \exp(\theta_t)),\ \theta_t = (1,0,1)\boldsymbol{\alpha}_t \tag{8.18}$$

i wobec tego może być wyliczona bezpośrednio przy danej realizacji wektora $\boldsymbol{\theta}$.

W prezentowanej metodzie estymacji, łączącej elementy podejścia klasycznego i bayesowskiego, funkcja wiarygodności dla modelu SVX wyznaczana jest za pomocą technik Monte Carlo, z zastosowaniem losowań z funkcją ważności (Ripley 1987, Osiewalski 2001). Przy wprowadzonych wyżej oznaczeniach, ogólną postać funkcji wiarygodności zapisuje się następująco:

$$L(\boldsymbol{\psi};\mathbf{y}) = p(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\psi}) = \int p(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{\psi}) d\boldsymbol{\theta} = \int p(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi})\, p(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{\psi}) d\boldsymbol{\theta} \tag{8.19}$$

Jako funkcję ważności $\tilde{p}(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y}, \boldsymbol{\psi})$ wykorzystywaną do symulacji wybiera się warunkową gęstość gaussowską $g(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y}, \boldsymbol{\psi})$ w taki sposób, by pokrywały się pierwsze i drugie pochodne względem $\boldsymbol{\theta}$ funkcji $p(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y}, \boldsymbol{\psi})$ i $g(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y}, \boldsymbol{\psi})$.

Prosta i efektywna procedura pozwalająca losować z aproksymacyjnego modelu gaussowskiego $g(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y}, \boldsymbol{\psi})$ została przedstawiona w pracy Durbina i Koopmana (2002).

Po zastosowaniu funkcji ważności $g(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y}, \boldsymbol{\psi})$, funkcja wiarygodności (8.19) przyjmuje postać:

$$L(\boldsymbol{\psi};\mathbf{y}) = \int p(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi}) \frac{p(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{\psi})}{g(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y}, \boldsymbol{\psi})} g(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y}, \boldsymbol{\psi}) d\boldsymbol{\theta} = \tilde{E}\left\{ p(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi}) \frac{p(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{\psi})}{g(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y}, \boldsymbol{\psi})} \right\} \tag{8.20}$$

gdzie $\tilde{E}$ oznacza wartość oczekiwaną odpowiadającą funkcji ważności $g(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y}, \boldsymbol{\psi})$.

Ponieważ w rozważanym przypadku wektor stanu jest generowany przez równanie stanu z liniowego modelu gaussowskiego, więc funkcja wiarygodności aproksymacyjnego modelu gaussowskiego określona jest wzorem:

$$L_g(\boldsymbol{\psi};\mathbf{y}) = g(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\psi}) = \frac{g(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{\psi})}{g(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y}, \boldsymbol{\psi})} = \frac{g(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi})\, p(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{\psi})}{g(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y}, \boldsymbol{\psi})} \tag{8.21}$$

zatem:

$$\frac{p(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{\psi})}{g(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{\psi})} = \frac{L_g(\boldsymbol{\psi};\mathbf{y})}{g(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi})} \tag{8.22}$$

Po podstawieniu (8.22) do (8.20) otrzymujemy:

$$L(\boldsymbol{\psi};\mathbf{y}) = L_g(\boldsymbol{\psi};\mathbf{y}) \tilde{E}\left\{ \frac{p(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi})}{g(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi})} \right\} \tag{8.23}$$

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Funkcję wiarygodności $L_g(\boldsymbol{\psi},\mathbf{y})$ aproksymacyjnego modelu gaussowskiego oblicza się za pomocą filtru Kalmana (zob. Durbin i Koopman 2001). Gęstości warunkowe $p(\boldsymbol{\theta}\,|\,\mathbf{y},\boldsymbol{\psi})$, $g(\boldsymbol{\theta}\,|\,\mathbf{y},\boldsymbol{\psi})$ mogą być łatwo wyliczone przy danych wartościach parametrów $\boldsymbol{\theta}$ i $\boldsymbol{\psi}$. Funkcja wiarygodności modelu SVX jest równoważna funkcji wiarygodności aproksymacyjnego modelu gaussowskiego, pomnożonej przez czynnik korygujący. Wartość tego czynnika ustala się za pomocą symulacji. Naturalnym estymatorem funkcji wiarygodności modelu SVX jest więc:

$$\hat{L}(\boldsymbol{\psi};\mathbf{y}) = L_g(\boldsymbol{\psi};\mathbf{y})\bar{w} \tag{8.24}$$

gdzie $\bar{w} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} w_i$, $w_i = \frac{p(\mathbf{y}\,|\,\boldsymbol{\theta}^i,\boldsymbol{\psi})}{g(\mathbf{y}\,|\,\boldsymbol{\theta}^i,\boldsymbol{\psi})}$, przy czym $\boldsymbol{\theta}^i$ oznacza próbę losową z rozkładu o gęstości $g(\boldsymbol{\theta}\,|\,\mathbf{y},\boldsymbol{\psi})$.

Dokładność tego estymatora zależy od własności wag w_i (Geweke 1989). Ponieważ symulowane próby są niezależne od siebie, wariancja odpowiadająca symulacji zmniejsza się wraz ze wzrostem liczby symulacji M. Transformacja logarytmiczna funkcji wiarygodności $\hat{L}(\psi;\mathbf{y})$ wprowadza obciążenie, które jednak może być skorygowane z dokładnością rzędu $O(M^{-3/2})$ (Shephard i Pitt 1997, Durbin i Koopman 1997). Po uwzględnieniu tego faktu otrzymujemy:

$$\ln\hat{L}(\boldsymbol{\psi};\mathbf{y}) = \ln L_g(\boldsymbol{\psi};\mathbf{y}) + \ln\bar{w} + \frac{s_w^2}{2M\bar{w}^2} \tag{8.25}$$

gdzie $s_w^2 = (M-1)^{-1}\sum_{i=1}^{M}(w_i-\bar{w})^2$.

konstrukcja aproksymacyjnego liniowego modelu gaussowskiego

Konstrukcja aproksymacyjnego liniowego modelu gaussowskiego jest istotnym etapem w procesie estymacji modelu SVX i w związku z tym zostanie teraz omówiona dokładniej. Szukany model, to model ze średnią $E(y_t) = \theta_t + c_t$ i wariancją $V(y_t) = H_t$, tzn.:

$$y_t = \theta_t + u_t,\ u_t \sim N(c_t, H_t),\ t = 1, \ldots, T \tag{8.26}$$

Przy tym wielkości c_t i H_t powinny być dobrane w taki sposób, że średnia i wariancja zmiennej y_t określonej zależnością (8.26) oraz średnia i wariancja prawdziwego modelu danego równaniami (8.1), (8.2) i (8.12) są, odpowiednio, tak bliskie siebie, jak to tylko jest możliwe. Zgodnie z (Durbin i Koopman 2002) można to osiągnąć, przyrównując pierwsze i drugie pochodne (względem $\boldsymbol{\theta}$) logarytmów gęstości $p(\boldsymbol{y}\,|\,\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\psi})$ i $g(\boldsymbol{y}\,|\,\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\psi})$ w punkcie $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \tilde{E}(\boldsymbol{\theta}) = \int \boldsymbol{\theta} g(\boldsymbol{\theta}\,|\,\mathbf{y},\boldsymbol{\psi})d\boldsymbol{\theta}$.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Oznaczmy zatem:

$$p_t = \ln p(y_t \mid \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi}) = -\frac{1}{2}\left[\ln 2\pi + \theta_t + y_t^2 \exp(-\theta_t)\right] \tag{8.27}$$

oraz:

$$g_t = \ln g(y_t \mid \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi}) = -\frac{1}{2}\left[\ln 2\pi + \ln H_t + H_t^{-1}(y_t - c_t - \theta_t)^2\right. \tag{8.28}$$

Wówczas:

$$\frac{\partial p_t}{\partial \theta_t} = -\frac{1}{2}\left[1 - y_t^2 \exp(-\theta_t)\right], \quad \frac{\partial^2 p_t}{\partial \theta_t^2} = -\frac{1}{2} y_t^2 \exp(-\theta_t)$$

$$\frac{\partial g_t}{\partial \theta_t} = H_t^{-1}(y_t - c_t - \theta_t), \quad \frac{\partial^2 g_t}{\partial \theta_t^2} = -H_t^{-1}$$

Przyrównując odpowiednie pochodne otrzymamy:

$$c_t = \frac{1}{2} H_t\left[1 - y_t^2 \exp(-\theta_t)\right] + y_t - \theta_t \tag{8.29}$$

$$H_t = \frac{2\exp(\theta_t)}{y_t^2} \tag{8.30}$$

Model dla $\tilde{y}_t = y_t - c_t$ jest więc równoważny z modelem:

$$\tilde{y}_t = \theta_t + u_t, \; u_t \sim \mathrm{N}(0, H_t). \tag{8.31}$$

iteracyjne wyznaczanie modelu aproksymacyjnego

Model aproksymacyjny wyznacza się iteracyjnie, zaczynając iteracje od $\tilde{\theta}_t = 0$ i wyznaczając $\tilde{H}_t$ oraz $\tilde{y}_t$ według wzorów (8.28) i (8.29). Kolejne wartości $\tilde{\theta}_t$, otrzymuje się, stosując filtr Kalmana (Durbin i Koopman 2001), aż do uzyskania zbieżności do $\hat{\theta}_t = \tilde{E}(\theta_t)$.

8.3. Prognozowanie zmienności za pomocą modeli SV

Jednodniowa prognoza $\sigma_T^2(1)$ zmienności jest z definicji warunkową wartością oczekiwaną zmiennej σ_{T+1}^2 przy danym zbiorze $\mathcal{F}_T$ informacji o procesie zwrotów do momentu T włącznie. Stosując funkcję wiarygodności otrzymaną za pomocą metod opisanych w poprzednim punkcie, wylicza się ją jako:

$$\sigma_T^2(1) = \hat{\sigma}^{\#2} \exp(\hat{h}_{T+1|T} + \tfrac{1}{2} p_{T+1|T}) \tag{8.32}$$

gdzie $\hat{\sigma}^{\#2}$ jest oszacowaniem największej wiarygodności parametru $\sigma^{\#2}$, $\hat{h}_{T+1|T}$ – estymatorem dla h_{T+1} przy danych T obserwacjach, a $p_{T+1|T}$ – jego błędem średniokwadratowym.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Estymatory $\hat{h}_{T+1|T}$ i $p_{T+1|T}$ wylicza się za pomocą metod symulacyjnych wprowadzonych przez Durbina i Koopmana (2000).

Jeśli horyzont prognozy jest równy l dniom ($l \geq 2$), to prognoza jest zdefiniowana wzorem:

$$\sigma_T^2(l) = \hat{\sigma}^{\#2} \exp(\hat{h}_{T+l|T} + \tfrac{1}{2} p_{T+l|T}) \tag{8.33}$$

Wartości $\hat{h}_{T+l|T}$ oraz $p_{T+1|T}$ wylicza się wówczas jako:

$$\hat{h}_{T+l|T} = \hat{\phi}^{l-1} h_{T+1|T} \tag{8.34}$$

$$p_{T+l|T} = \hat{\phi}^{2(l-1)} p_{T+1|T} + \sum_{i=0}^{l-2} \hat{\phi}^{2i} \hat{\sigma}_\eta^2 \tag{8.35}$$

gdzie $\hat{\phi}$ i $\hat{\sigma}_\eta^2$ są odpowiednio oszacowaniami największej wiarygodności parametrów ϕ oraz σ_η^2.

Jeśli $l \to \infty$, to $\sigma_T^2(l)$ dąży do $\hat{\sigma}^{\#2} \exp\left(\dfrac{\hat{\sigma}_\eta^2}{2(1-\hat{\phi}^2)} \right)$, czyli do oszacowania wariancji bezwarunkowej.

Dzienne prognozy dla modelu SVX określone są podobnymi wzorami jak dla modelu SV, przy czym do obliczenia $\hat{h}_{T+1|T}$ i $p_{T+1|T}$ niezbędna jest znajomość wartości x_T dodatkowej zmiennej objaśniającej. Jeśli nie są znane wartości dodatkowej zmiennej objaśniającej wykraczające poza moment T, to dla $l \geq 2$ nie można wyznaczyć $\hat{h}_{T+1|T}$ ani $p_{T+1|T}$. Jednym z możliwych sposobów obejścia tej trudności jest przyjęcie założenia, że wartości te nie zmieniają się podczas kolejnych dni handlowych.

8.4. Porównanie wyników uzyskanych za pomocą modeli GARCH i SV

Modele GARCH i modele zmienności stochastycznej SV postrzegane są jako bezpośrednio konkurencyjne klasy modeli zmienności. Początkowa przewaga modeli GARCH związana z łatwiejszą estymacją i znacznie krótszym czasem wyznaczania prognoz traci znaczenie wraz z rozwojem możliwości obliczeniowych. Zanim zajmiemy się praktyką estymacji i interpretowania modeli SV, dokonajmy na przykładach, bez wchodzenia w szczegóły, porównania oszacowań zmienności w próbie i prognoz uzyskanych za pomocą modeli z obu tych grup.

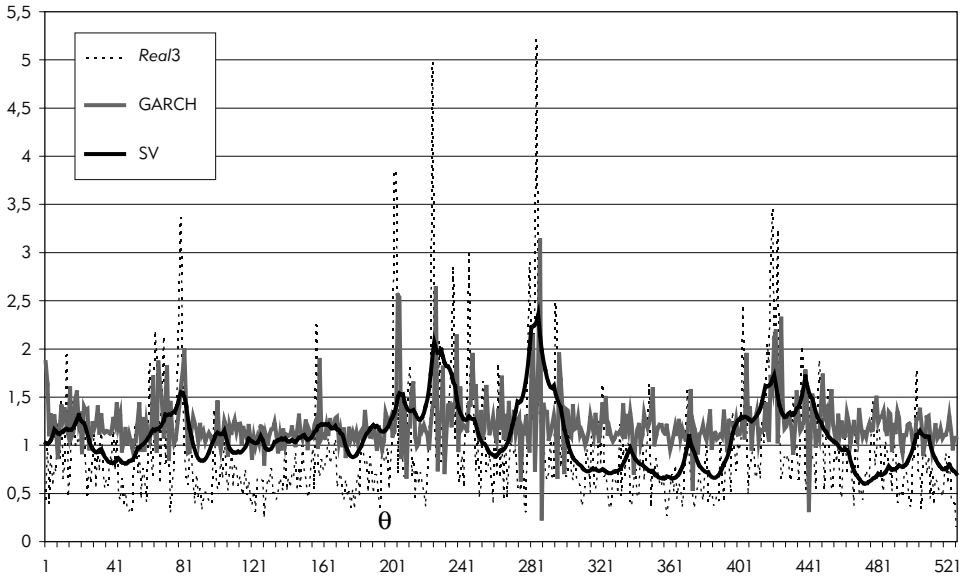
Ze względu na dodatkowy proces losowy występujący w specyfikacji modelu, modele SV są bardziej elastyczne i powinny lepiej opisywać zmienność w próbie.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Jeśli chodzi o jakość prognoz, sprawa nie jest tak oczywista. Poniżej przedstawiamy porównanie oszacowań zmienności w próbie oraz prognoz zmienności uzyskanych za pomocą modeli GARCH i SV dla wybranych szeregów z polskiego rynku finansowego. Zamieszczone w tym podrozdziale rysunki pozwalają na porównanie dynamiki zmienności uzyskanej za pomocą modeli z obu klas. Dokonując porównania prognoz, należy jednak pamiętać, że w wypadku modeli GARCH były one wyliczane na cały okres prognozy za pomocą jednego oszacowanego na podstawie próby modelu. Natomiast w przyjętym przez nas podejściu, wyznaczanie kolejnych prognoz jednodniowych za pomocą modelu SV obejmuje każdorazowo ponowną estymację parametrów na podstawie próby zawierającej kolejną obserwację. Jest to niezbędne ze względu na konieczność wyliczania za pomocą metod symulacyjnych (Durbin i Koopman 2000) estymatora prognozy $\hat{h}_{T+1|T}$ i jego błędu średniokwadratowego $p_{t+1|t}$ (zob. (8.32)).

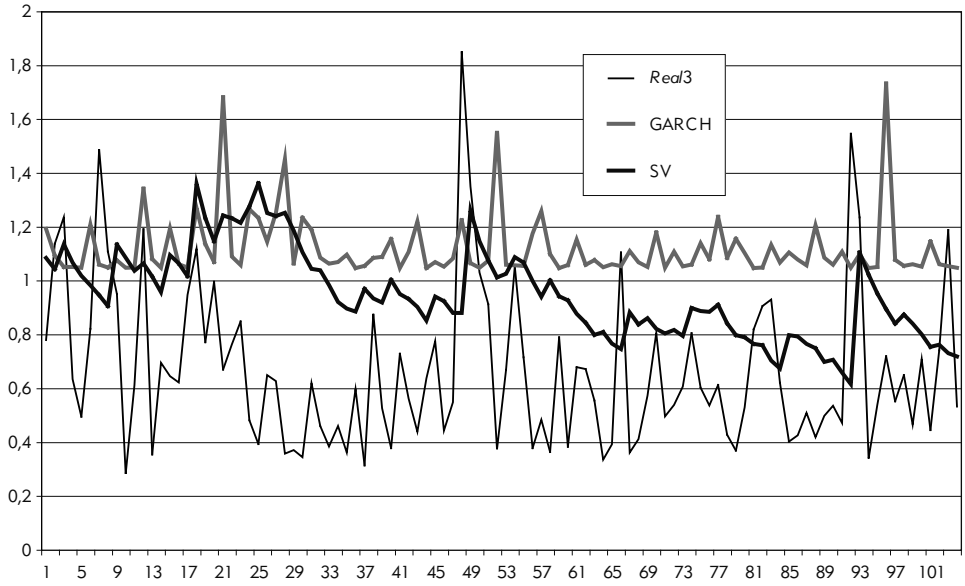
Ilustracje 8.1 i 8.2 przedstawiają, odpowiednio, zestawienie prognoz zmienności indeksu WIG oszacowanych za pomocą modelu GARCH(0,4) (tabela 3.2) oraz modelu SV (tabela 8.1). Przy oszacowaniach w próbie (ilustracja 8.1) uwagę zwracają różnice w gładkości wykresów zmienności otrzymanych z różnych modeli. Wykres odpowiadający modelowi SV jest wyraźnie mniej postrzępiony. Porównanie jakości prognoz na podstawie danych zawartych w tabelach 6.7 i 8.2 wskazuje na wyraźnie wyższą zdolność prognostyczną modelu SV w tym wypadku. Jest to widoczne również na ilustracji 8.2.

Ilustracja 8.1. WIG*k*. Porównanie zmienności w próbie uzyskanych za pomocą modeli GARCH i SV



Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 8.2. WIG*k*. Porównanie prognoz uzyskanych za pomocą modeli GARCH i SV

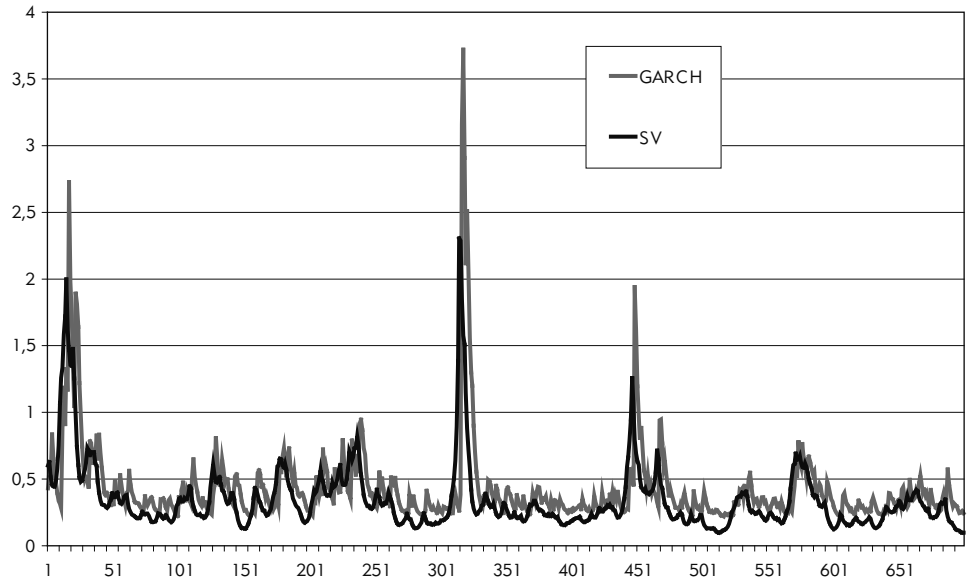


Na ilustracjach 8.3 i 8.4 pokazane są porównania oszacowań zmienności w próbie i prognoz w przypadku krótkiego szeregu zwrotów kursu walutowego USD/PLN (USDPLN*k*) uzyskane za pomocą modelu GARCH(1,1) (tabela 4.5) i SV (tabela 8.5). W wypadku estymacji w próbie różnice są niewielkie. Na ilustracji 8.4 widać wyraźnie, że jakość prognoz, niezależnie od modelu, obniża się, począwszy od obserwacji 65. Miary jakości prognoz wskazują, że tym razem nieco lepsza jest prognoza uzyskana za pomocą modelu GARCH.

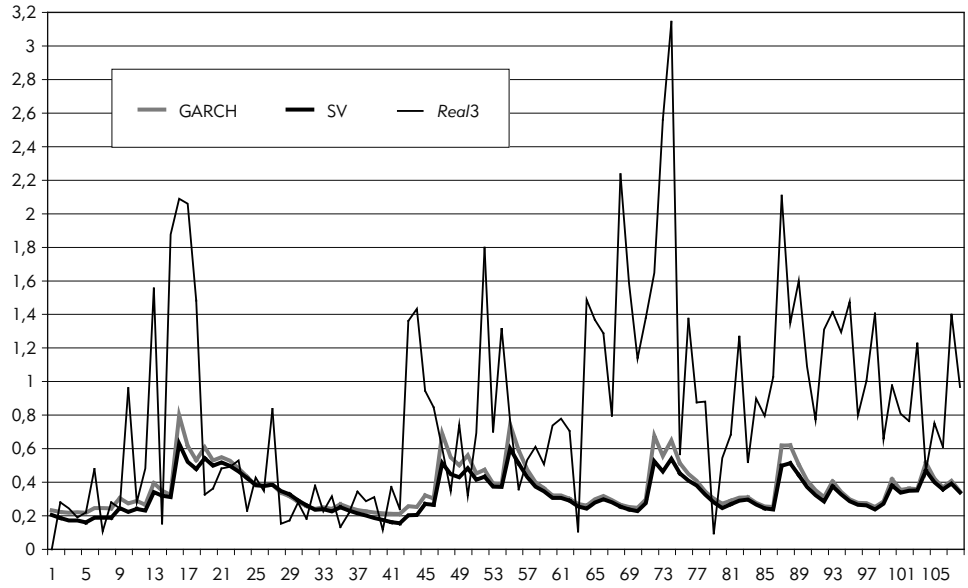
Bardziej obszerne i szczegółowe porównanie przydatności modeli GARCH i SV w modelowaniu zmienności szeregów z polskiego rynku kapitałowego (indeksy giełdowe) zostało przedstawione w pracach (Pajor 2003, Doman M. 2003, Doman R. 2003, Doman i Doman 2004, Osiewalski i in. 2004).

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustacja 8.3. USDPLN*k*. Porównanie oszacowań zmienności w próbie uzyskanych za pomocą modeli GARCH i SV



Ilustracja 8.4. USDPLN*k*. Porównanie prognoz zmienności uzyskanych za pomocą modeli GARCH i SV



Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

8.5. Od teorii do praktyki

Estymacja modeli SV i prognozowanie za ich pomocą zmienności są, jak to widzieliśmy w podrozdziałach 8.2 i 8.3, zadaniami bardziej złożonymi, niż w wypadku modeli GARCH. Zapewne w związku z tym mało jest gotowych pakietów statystycznych umożliwiających estymację tych modeli. Prezentowane w tym rozdziale oszacowania modeli zmienności stochastycznej, a także prognozy zmienności zostały wyliczone przy użyciu zmodyfikowanych przez nas programów svmodel.ox, sivmodel.ox i svxmodel.ox towarzyszących pakietowi SsfPack (Koopman i in. 1999). Podobnie jak w wypadku większości programów pracujących w środowisku Ox (Doornik 2007), w charakterze metody optymalizacyjnej stosowany jest algorytm BFGS (Fletcher 1987).

Do wykorzystywanych w przykładach szeregów stóp zwrotu indeksów WIG, WIG20, notowań spółki PKN Orlen i kursu walutowego USD/PLN próbowaliśmy dopasować trzy przedstawione w tym rozdziale wersje modelu SV. Dodatkową zmienną objaśniającą w równaniach była zmienna $x_t = \ln(Real3_t)$. Trzeba zaznaczyć, że przy podejmowaniu prób estymacji modeli SVX należy mieć świadomość, że dość często pojawiają się przy ich szacowaniu problemy numeryczne, które mogą oznaczać, że dany model nie opisuje poprawnie dynamiki rozpatrywanego szeregu.

Tabela 8.1. Oszacowania parametrów modeli zmienności stochastycznej dopasowanych do szeregów zwrotów indeksu WIG (pod oszacowaniami podane są końce 95% przedziałów ufności)

Szereg	**WIG*d***	**WIG*k***	**WIG*k***	**WIG*k***
Model	**SV**	**SV**	**SVRX$_1$(ln(*Real*3))**	**SVX$_1$((ln(*Real*3))**
ϕ	0,9519 0,9186 0,9720	0,5353 0,0004 0,9997	–	– 0,0029 – 0,6146 0,6117
σ_η^2	0,0568 0,0332 0,0971	0,1971 0,0029 13,389	0,2859 0,1320 0,6193	0,2859 0,1310 0,6242
$\sigma^{\#2}$	2,2368 1,7832 2,8059	1,0691 0,8582 1,3318	1,1499 0,9732 1,3588	1,1500 0,9719 1,3608
γ	–	–	0,4351 (0,1271)	0,4354 (0,1271)

Porównanie oszacowań parametrów modeli SV dopasowanych do szeregów zwrotów WIG*d* i WIG*k* (tabela 8.1) prowadzi do podobnych wniosków, jak otrzymane za pomocą modeli GARCH. Obserwujemy znaczny spadek wartości parametru ϕ, oznaczający zmniejszenie persystencji zmienności. Jednocześnie wzrasta σ_η^2, co świadczy o spadku możliwości prognozowania zmienności, mimo że sama zmienność zmniejsza

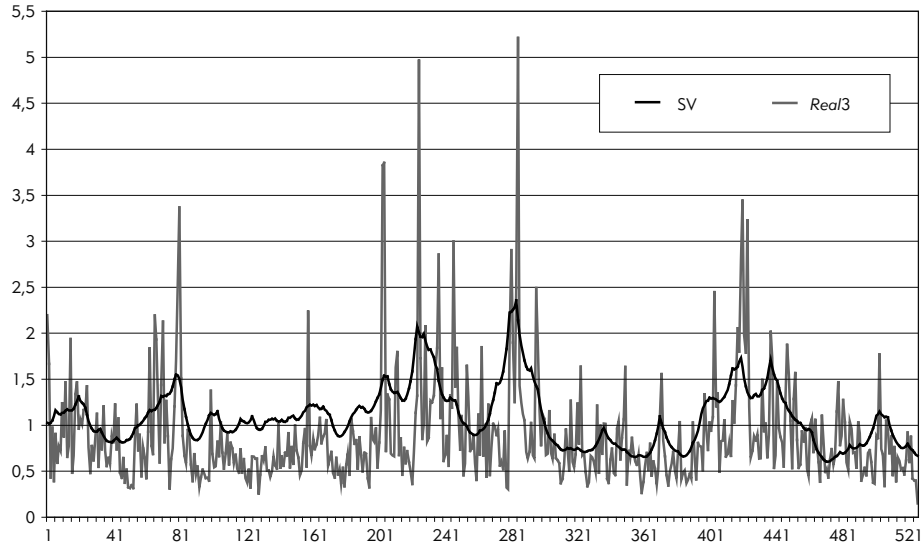
substytucja między zmiennością zrealizowaną a zmiennością z modelu SV

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

się (parametr skalujący $\sigma^{\#2}$ maleje o połowę). W modelu SVX dodatkowa zmienna objaśniająca ln(*Real*3) występuje z dużym dodatnim współczynnikiem, co oznacza, że istotny wpływ na poziom zmienności w danym dniu ma zmienność z dnia poprzedniego, czyli faktycznie potwierdza istnienie silnej persystencji zmienności. Zwraca uwagę fakt prawie pełnej substytucji między zmiennymi h_{t-1} a $x_{t-1} = \ln(Real3_{t-1})$ w wypadku szeregu WIG*k*. Wobec tego, że jednocześnie $\sigma^{\#2}$ jest bliskie jedności, można ten fakt traktować jako argument na rzecz tezy, że *Real*3 dobrze szacuje prawdziwą zmienność.

Przedstawione na ilustracji 8.5 wykresy zmienności zrealizowanej ln(*Real*3) oraz oszacowań zmienności na podstawie modelu SV dla szeregu WIG*k* pokazują, że dopasowanie w próbie jest dobre. Oczywiście nie wychwytuje wszystkich obserwacji nietypowych, ale poprawnie opisuje tendencje.

Ilustracja 8.5. WIG*k*. Porównanie w próbie zmienności wyestymowanej za pomocą modelu SV z logarytmem zmienności zrealizowanej



W tabeli 8.2 przedstawiono błędy prognozy i współczynnik R^2 regresji Mincera–Zarnowitza dla prognoz otrzymanych z wyestymowanych modeli.

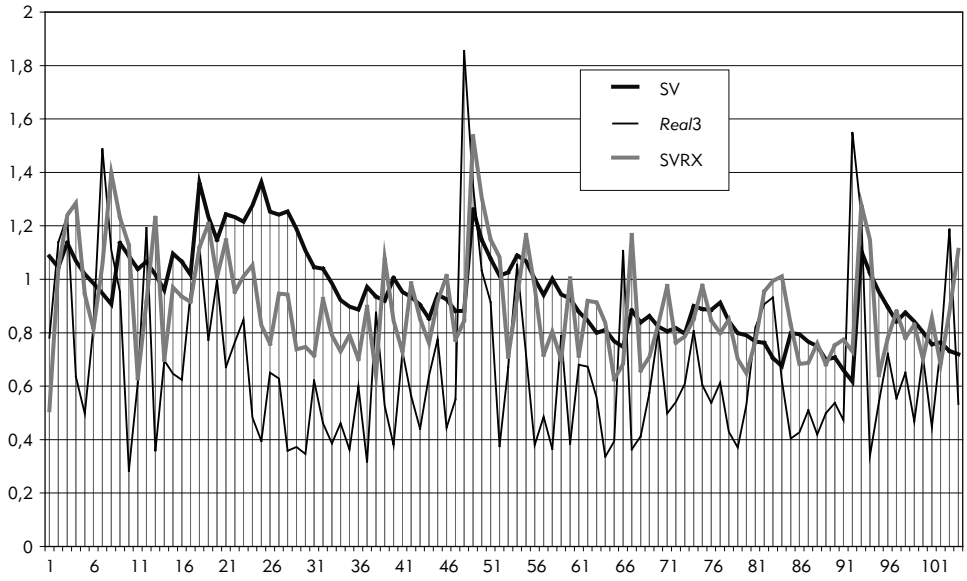
Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Tabela 8.2. WIG. Ocena jakości prognoz zmienności otrzymanych za pomocą modeli zmienności stochastycznej

Szereg	**WIG*d***	**WIG*k***	**WIG*k***	**WIG*k***
Model	**SV**	**SV**	**SVRX$_1$(ln(*Real*3))**	**SVX$_1$ (ln(*Real*3))**
R^2	0,002	0,01	0,07	0,08
MSE	0,7134	0,1845	0,1440	0,1441
MedSE	0,4898	0,1222	0,0771	– 0,0901
ME	– 0,7176	– 0,2814	– 0,2239	–0,2240
MAE	0,7541	0,3667	0,3060	0,3060
RMSE	0,8446	0,4295	0,3794	0,3795
MAPE	1,4463	0,7241	0,6112	0,6107
AMAPE	0,3717	0,2391	0,2072	0,2070
TIC	0,3907	0,2531	0,2305	0,2305
LLF	0,8276	0,3574	0,2936	0,2938

Lepsze prognozy dają modele oszacowane na podstawie krótkiego szeregu zwrotów WIG*k*. Nie jest przy tym widoczna wyraźna różnica między modelami SVRX a SVX z dodatkową zmienną objaśniającą ln(*Real*3). Wykres na ilustracji 8.6 uwidacznia to, że podstawowy model SV w większym stopniu niż SVX przeszacowuje prognozowaną zmienność.

Ilustracja 8.6. WIG*k*. Porównanie prognoz z modeli SV oraz SVX ze zmiennością zrealizowaną *Real*3



Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

W przypadku spółki PKN Orlen oprócz całego szeregu stóp zwrotu opisanego w rozdziale 1, który oznaczamy tu przez PKNOrlen*d*, badamy również krótszy szereg (PKNOrlen*k*) zawierający dane od 8 lutego 2001 r. Dla tego ostatniego szeregu prezentujemy oszacowania modelu SVRX z logarytmem zmienności zrealizowanej jako dodatkową zmienną objaśniającą. Wyniki estymacji i ocenę oszacowań prognoz przedstawiono w tabelach 8.3 i 8.4 oraz na ilustracji 8.7.

Tabela 8.3. Oszacowania parametrów modeli zmienności stochastycznej dopasowanych do szeregów zwrotów notowań spółki PKN Orlen (pod oszacowaniami podane są końce 95% przedziałów ufności)

Szereg	**PKNOrlen*d***	**PKNOrlen*k***
Model	**SV**	**SVRX$_1$(*Real*3)**
ϕ	0,8272 0,5016 0,9579	–
σ_η^2	0,0999 0,0176 0,5655	0,3905 0,2027 0,7522
$\sigma^{\#2}$	3,3155 2,7629 3,9786	2,6971 2,1682 3,355
γ	–	0,1166 (0,0556)

Tabela 8.4. Ocena jakości prognoz zmienności otrzymanych za pomocą modeli zmienności stochastycznej

Szereg	**PKNOrlen*d***	**PKNOrlen*k***
Model	**SV**	**SVRX$_1$(*Real*3)**
R^2	0,004	0,04
MSE	3,8003	2,5189
MedSE	2,6971	1,7145
ME	– 1,1651	– 0,6247
MAE	1,6834	1,3063
RMSE	1,9494	1,5871
MAPE	2,1102	1,5889
AMAPE	0,3620	0,3172
TIC	0,3386	0,3048
LLF	1,1850	0,9083

Modele zmienności stochastycznej dopasowane do szeregów zwrotów kursu walutowego USD/PLN nie wykazują dużego zróżnicowania parametrów (tabela 8.5). Niezależnie od okresu, z którego pochodzą dane wykorzystane w estymacji, wartości ϕ są bliskie 1, σ_η^2 jest małe. Parametr $\sigma^{\#2}$ wzrasta po uwolnieniu kursu walutowego, co jest związane ze wzrostem zmienności. Interesujący jest

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

fakt, że wartość oszacowania parametru σ_η^2 jest niższa dla modeli dopasowanych do krótkich szeregów, czyli estymowanych na podstawie danych z okresu wolnego kursu walutowego. Oznacza to, że prognozowanie zmienności kursu jest w tym wypadku łatwiejsze, niż gdy bierzemy pod uwagę cały szereg obserwacji. Nie jest to związane wyłącznie z niejednorodnością (ze względu na system kursowy) długich szeregów zwrotów. Wydaje się, że z reguły łatwiej jest prognozować zmienność dla wolnych kursów walutowych, niż podlegających ograniczeniom.

Ilustracja 8.7. PKN Orlen. Porównanie prognoz zmienności z różnych modeli SV

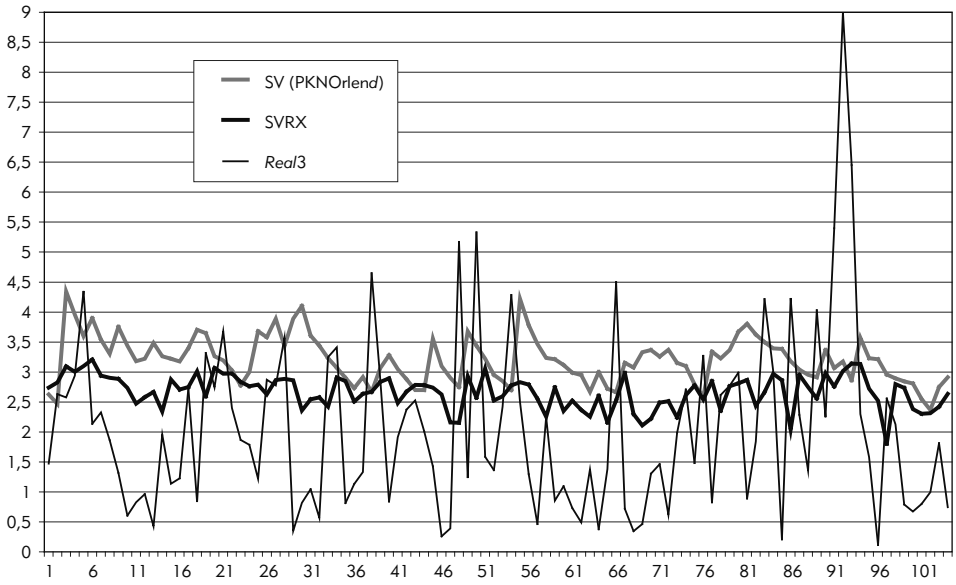


Tabela 8.5. Oszacowania parametrów modeli zmienności stochastycznej dopasowanych do szeregów zwrotów kursów walutowych EURPLN i USDPLN (pod oszacowaniami podane są końce 95% przedziałów ufności)

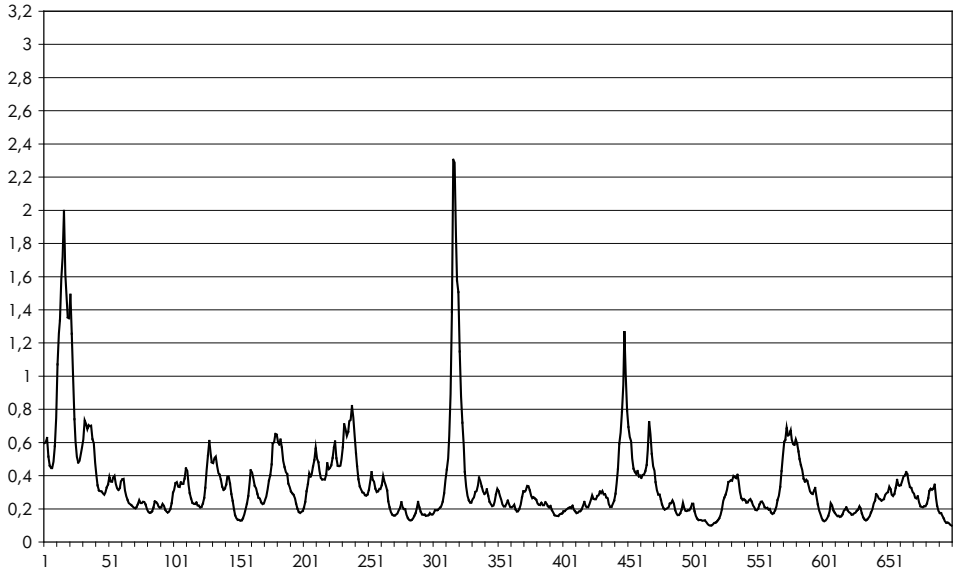
Szereg	**EURPLN*d***	**EURPLN*k***	**USDPLN**	**USDPLN*k***
Model	**SV**	**SV**	**SV**	**SV**
ϕ	0,9487 0,9173 0,9686	0,9132 0,7883 0,9675	0,9237 0,8836 0,9507	0,8929 0,7744 0,9530
σ_η^2	0,0780 0,0497 0,1223	0,0669 0,0241 0,1857	0,1218 0,0790 0,1878	0,0988 0,0411 0,2378
$\sigma^{\#2}$	0,2999 0,2336 0,3851	0,4435 0,3464 0,5678	0,2082 0,1680 0,2581	0,3288 0,2570 0,4207

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Na ilustracji 8.8 został przedstawiony wykres zmienności wyestymowanej za pomocą modelu SV dopasowanego do krótkiego szeregu zwrotów kursu USD/PLN. Widoczne na wykresie piki pokazują, że modele wychwyciły znaczny wzrost zmienności na przełomie czerwca i lipca 2001 r. Był on związany z osłabieniem PLN względem USD na skutek informacji na temat dużej luki w budżecie Polski, niepewną sytuacją przed wyborami oraz niekorzystnymi informacjami na temat obrotów bieżących. Jednocześnie pojawiły się na rynkach finansowych wątpliwości co do wypłacalności Argentyny i Turcji. Wszystkie te czynniki wywołały gwałtowny wzrost zmienności. Mniej więcej w połowie lipca, po publikacji danych na temat inflacji i przyjęciu przez Sejm nowelizacji ustawy budżetowej, zmienność powróciła do swojego normalnego poziomu.

Prognozy zmienności kursów walutowych uzyskane za pomocą modeli zmienności stochastycznej są bardzo często, podobnie jak w wypadku modeli GARCH, zaniżone. Wartości współczynnika determinacji R^2 w regresji Mincera–Zarnowitza są dość wysokie.

Ilustracja 8.8. USDPLN*k*. Zmienność w próbie wyestymowana za pomocą modelu SV. Okres od 17.11.2000 do 31.12.2003.



Ilustracja 8.9 i tabela 8.6 pokazują, że prognozy dość poprawnie oddają kierunki zmian zmienności, nie przewidując jednak właściwie jej poziomu. Mniejsze błędy prognozy są związane z modelem krótszego szeregu, obejmu-

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

jącego okres wolnego kursu walutowego. Jednak różnice pomiędzy prognozami otrzymanymi z modeli wyestymowanych na podstawie różnych okresów obserwacji są niewielkie.

Ilustracja 8.9. USD/PLN. Prognozy zmienności kursu w okresie 1.01.2003–30.05.2003 na podstawie modeli SV dopasowanych do szeregów różnej długości i zmienność zrealizowana *Real*3

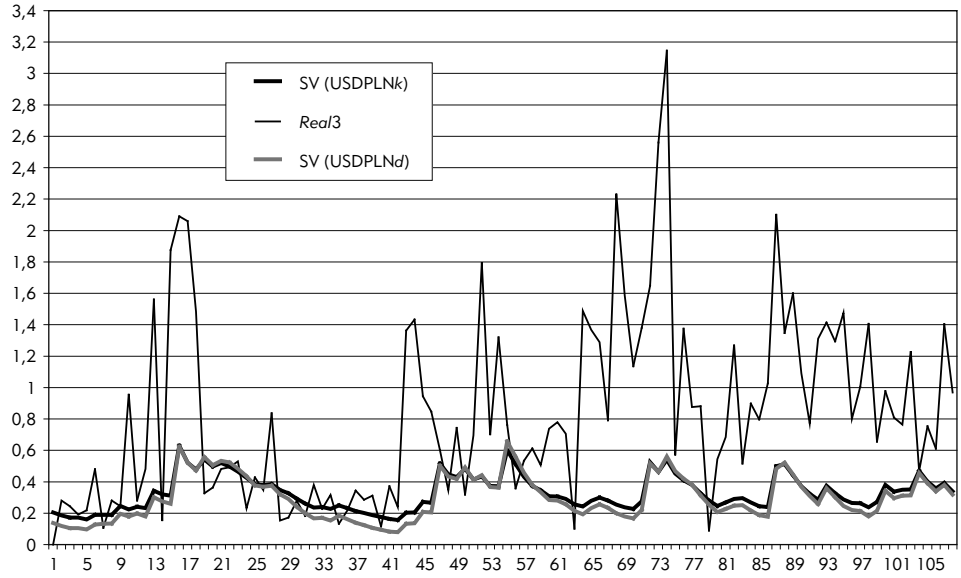


Tabela 8.6. USD/PLN. Ocena jakości prognoz zmienności otrzymanych za pomocą modeli zmienności stochastycznej (miary MAPE i LLF nie mogły być wyliczone w związku z występowaniem zerowej zmienności zrealizowanej)

Szereg	**USDPLN*d***	**USDPLN*k***
Model	**SV**	**SV**
R^2	0,1100	0,1200
MSE	0,6038	0,5729
MedSE	0,1632	0,1359
ME	0,5292	0,4977
MAE	0,5675	0,5439
RMSE	0,7770	0,7569
MAPE	–	–
AMAPE	0,4342	0,3903
TIC	0,5752	0,5527
LLF	–	–

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

8.6. Uwagi

Przedstawione tu informacje na temat modeli SV należy traktować tylko jako wprowadzenie w bogaty świat modeli zmienności stochastycznej. Klasa tych modeli jest bogata, a ich konstrukcja i wyrafinowane metody estymacji sprawiają, że jest też bardzo interesująca.

Zwracamy jednak uwagę, że w literaturze często (a może nawet częściej) pod nazwą modele zmienności stochastycznej (lub modele SV) rozumie się modele z czasem ciągłym opisywane za pomocą stochastycznych równań różniczkowych, będące uogólnieniami modelu Blacka–Scholesa wyceny opcji (por. podrozdział 8.1). Zainteresowanych modelami zmienności stochastycznej (w obu wspomnianych znaczeniach) odsyłamy do zbioru artykułów pod redakcją Shepharda (2005).

W języku polskim istnieje obszerna monografia Anny Pajor (2003) poświęcona modelom zmienności stochastycznej i wiele artykułów analizujących tę grupę modeli na gruncie bayesowskim (Pajor 2001, Osiewalski in. 2004).

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

9

Wartość zagrożona

Na połowę lat 70. ubiegłego wieku można datować początek okresu, w którym na światowym rynku finansowym obserwuje się znaczny wzrost zmienności i – co za tym idzie – zwiększający się poziom ryzyka, rozumianego ogólnie jako stopień niepewności co do przyszłego zwrotu netto. Źródła tej niepewności znajdują swój wyraz w często spotykanej w literaturze klasyfikacji ryzyka wyróżniającej jego cztery podstawowe typy: ryzyko kredytowe, ryzyko operacyjne, ryzyko płynności i ryzyko rynkowe (por. Jajuga 2008, Jajuga i Jajuga 2004, Tarczyński i Mojsiewicz 2001).

Ryzyko kredytowe wiąże się z możliwą stratą spowodowaną niezdolnością partnera w interesach do wywiązania się z przyjętych zobowiązań. Ryzyko operacyjne dotyczy strat, które mogą być poniesione w wyniku niesprawnego działania systemów zarządzania lub niewystarczającej kontroli. Ryzyko płynności związane jest z koniecznością realizacji nieoczekiwanych dużych przepływów płatności w krótkim okresie, na wymuszonych sytuacją niekorzystnych warunkach. Ryzyko rynkowe szacuje niepewność przyszłych dochodów spowodowaną zmianami warunków rynkowych. W działalności prowadzonej na rynku finansowym, najbardziej istotne jest ryzyko rynkowe, gdyż dotyczy potencjalnej straty ekonomicznej spowodowanej spadkiem wartości rynkowej portfela.

W ostatnich kilkunastu latach problem zarządzania ryzykiem stał się szczególnie widoczny ze względu na następujące w tym czasie głośne katastrofy finansowe. W związku z tym, przedmiotem szczególnego zainteresowania zarówno instytucji nadzorujących rynki finansowe, jak i badaczy tych rynków oraz praktyków zajmujących się inwestycjami finansowymi stały się techniki ilościowe pozwalające na oszacowanie możliwych strat, na które narażone są przedsiębiorstwa dokonujące tych inwestycji.

wartość zagrożona

Standardową miarą, za pomocą której analitycy finansowi (zarówno zatrudnieni w instytucjach finansowych, jak i instytucjach kontrolujących) kwantyfikują ryzyko rynkowe, jest obecnie tzw. wartość zagrożona (*Value at Risk* – VaR, wartość

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

narażona na ryzyko). Najkrócej mówiąc, VaR, w odniesieniu do portfela, szacuje, jaka jego część w danym okresie zagrożona jest stratą, przy danym poziomie istotności. Dokładniej: VaR jest liczbą zdefiniowaną w taki sposób, że prawdopodobieństwo, iż portfel straci na wartości więcej niż jego VaR, w konkretnym horyzoncie czasowym, jest równe z góry zadanej liczbie α. Wielka popularność, jaką VaR zdobył wśród praktyków finansowych, wynika z prostoty koncepcji: instrument ten sprowadza ocenę ryzyka rynkowego związanego z portfelem do wyznaczenia jednej liczby – straty zagrażającej z danym prawdopodobieństwem.

Wyliczanie wielkości VaR jest ważne zarówno dla oceny kondycji instytucji przyjmujących na siebie ryzyko, jak i dla organów kontrolujących te instytucje. Znalazło to wyraz w dyrektywach Bazylejskiego Komitetu Nadzoru Bankowego (*Basel Committee on Banking Supervision*), który w 1996 roku w poprawce do tzw. Bazylejskiej Ugody Kapitałowej (*International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards*) określił ilościowe wymagania dotyczące obliczania VaR przez banki i inne instytucje finansowe.

Basel II

W listopadzie 2005 roku została opublikowana nowa wersja tego dokumentu o nazwie *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: A Revised Framework* (Basel II).

Przy obliczaniu VaR negatywne konsekwencje dla działania instytucji implikuje tak samo jego przeszacowanie, jak i niedoszacowanie. W pierwszym wypadku, konsekwencją może być suboptymalna alokacja kapitału powodująca niepotrzebne obniżenie zysku. Zaniżona prognoza VaR może natomiast skutkować zachwianiem stabilności finansowej w razie ziszczenia się niekorzystnych okoliczności.

podział modeli szacowania wartości narażonej na ryzyko

Mimo że VaR wydaje się prostym i intuicyjnie jasnym pojęciem, to metody jego szacowania nie są jednoznacznie określone, gdyż wiążą się z wyznaczaniem kwantyla nieznanego na ogół rozkładu zwrotu z instrumentu finansowego w rozpatrywanym przedziale czasu. Istniejące modele szacowania wartości narażonej na ryzyko można ogólnie podzielić na trzy kategorie:

- parametryczne (RiskMetrics, modele GARCH),
- nieparametryczne (symulacje historyczne, modele hybrydowe),
- semiparametryczne (teoria wartości ekstremalnych, regresja kwantylowa, CAViaR, modele GARCH dopasowane metodą quasi-największej wiarygodności).

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

9.1. Metody nieparametryczne szacowania wartości zagrożonej

Wartość zagrożoną VaR określa się zwykle (Jajuga i in. 2001) za pomocą równości:

$$P(P_t \leq P_{t-1} - \mathrm{VaR}) = \alpha \tag{9.1}$$

gdzie P_t jest wartością analizowanego instrumentu finansowego w momencie t. Zatem VaR na poziomie istotności α (często też mówi się, na poziomie ufności $(1 - \alpha)$) jest taką wielkością straty, iż prawdopodobieństwo, że w momencie t zostanie ona poniesiona lub przekroczona, jest równe (małej) liczbie α.

Zwróćmy uwagę na to, że prostota tego określenia jest bardzo złudna. Wyliczenie VaR na podstawie wzoru (9.1) wymaga bowiem zbudowania modelu probabilistycznego, który pozwoliłby na wyliczanie prawdopodobieństwa P.

Można określić również VaR jako procentową stratę wartości instrumentu. Jeśli rozważamy procentowe logarytmiczne stopy zwrotu, $r_t = 100(\ln p_t - \ln p_{t-1})$, to wersja procentowa określenia (9.1) jest w przybliżeniu równoważna zapisowi:

$$P(r_t \leq -\mathrm{VaR}) = \alpha \tag{9.2}$$

VaR jako kwantyl rozkładu stóp zwrotu

a zatem liczba przeciwna do VaR jest α-kwantylem rozkładu procentowego zwrotu logarytmicznego r_t.

symulacja historyczna

Jedną z najbardziej powszechnych nieparametrycznych metod szacowania VaR jest tzw. symulacja historyczna. W podejściu tym, procedura obliczania VaR jest bardzo prosta, gdyż nie są czynione żadne założenia o rozkładzie zwrotów.

Jak w poprzednich rozdziałach, niech r_t oznacza szereg dziennych zwrotów (procentowych, logarytmicznych) rozważanego instrumentu. Symulacja historyczna oparta jest na pojęciu ruchomego okna. W celu wyliczenia VaR na dzień $T + 1$ ustala się okno kończące się zwrotem r_T, mające ustaloną długość. Zazwyczaj jest to okres od sześciu miesięcy do dwóch lat. Na podstawie zwrotów zawartych w oknie, wylicza się α-kwantyl empiryczny. VaR na dzień $T + 1$, na poziomie istotności α, dla zajmującego pozycję długą w danym instrumencie finansowym (np. inwestora posiadającego pakiet akcji), jest liczbą przeciwną do tego kwantyla. Dla strony zajmującej pozycję krótką (np. inwestora, który pożyczył od kogoś pakiet akcji), VaR na poziomie istotności α jest równy kwantylowi empirycznemu rzędu $(1 - \alpha)$.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

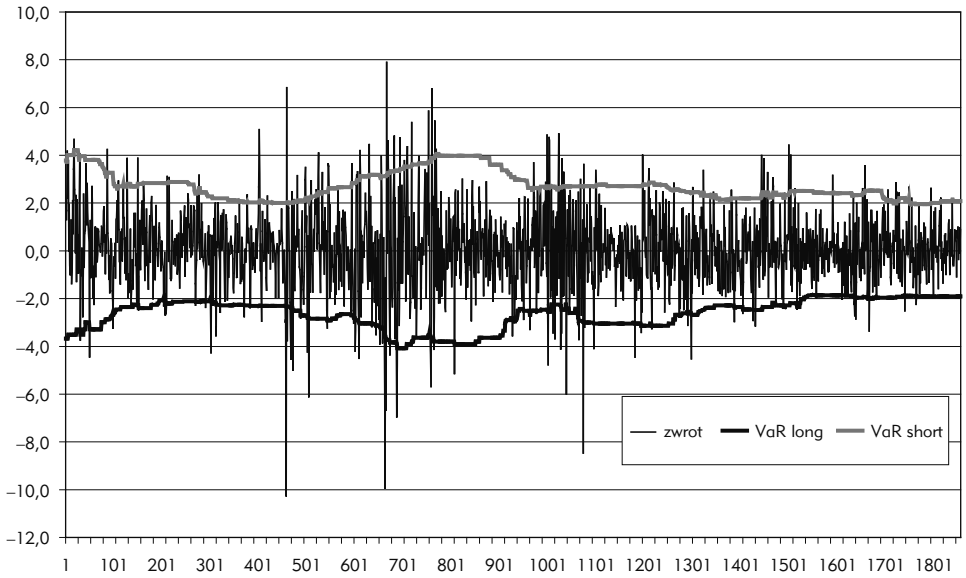
W celu wyznaczenia VaR na następny dzień okno przesuwa się o jedną obserwację i cała procedura jest powtarzana. Mimo że w podejściu tym nie ma wyraźnych założeń dotyczących rozkładu zwrotów, to założenie takie występuje w sposób niejawny: przyjmuje się, że rozkład nie zmienia się w obrębie okna. Pierwszą konsekwencją tego ukrytego założenia jest logiczna sprzeczność metody symulacji historycznej. Jeśli zakłada się, że wszystkie zwroty w obrębie okna mają taki sam rozkład, to z własności przechodniości relacji posiadania takiego samego rozkładu wynika, że wszystkie rozpatrywane zwroty mają taki sam rozkład. Nie ma zatem sensu ustalanie długości okna. Poza tym estymator kwantyla empirycznego jest zgodny, jeśli długość okna dąży do nieskończoności. Trzeci problem również wiąże się z ustalaniem długości okna, gdyż prognozy VaR oparte na symulacji historycznej są sensowne tylko wtedy, gdy dane historyczne wykorzystane do ich obliczenia mają w przybliżeniu ten sam rozkład. Charakterystyczne dla szeregów zwrotów skupiska zmienności występują jednak nieregularnie i mają zróżnicowaną długość. W związku z tym właściwy dobór okna musiałby spełniać dwa wykluczające się warunki. Okno powinno być dostatecznie duże, by wnioskowanie statystyczne było uprawnione, a z drugiej strony na tyle krótkie, by nie obejmować obserwacji spoza bieżącego skupiska zmienności. Ponadto, pojawia się dodatkowy problem związany z wahaniami poziomu zmienności. Kiedy tylko kilka ostatnich danych w oknie pochodzi z obszaru o wyższej bądź niższej niż dotychczas zmienności, siłą rzeczy dokonujemy prognoz na okres mający nową dynamikę głównie na podstawie danych z okresu o zmienności niższej bądź wyższej niż obecna. VaR oszacowany na podstawie symulacji historycznych może również zawierać prognozowalne skoki spowodowane dyskretnością zwrotów ekstremalnych. Jeśli na końcu okna w dniu T wystąpi ekstremalny zwrot ujemny, to można przewidzieć, że VaR szacowany na dzień $T + 1$ wzrośnie (a przynajmniej nie zmaleje). Z kolei przy „wychodzeniu" zwrotu r_T z okna wystąpi sytuacja odwrotna. Ta ostatnia okoliczność w pewnym sensie dyskwalifikuje metodę symulacji historycznej, gdyż dowodzi, że o prognozie VaR może decydować wartość zwrotu bardzo odległego (o długość okna).

wpływ zwrotów na wartość VaR

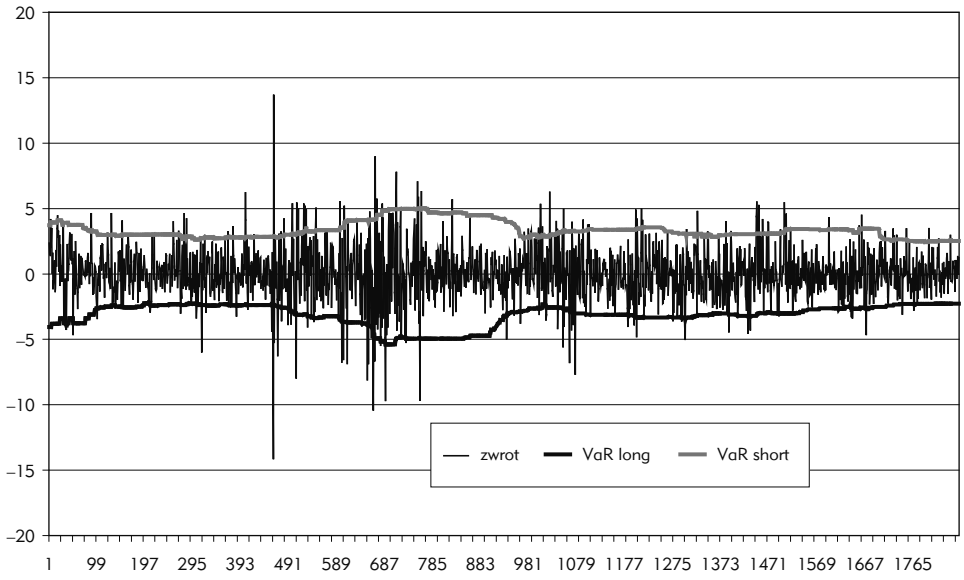
Na ilustracjach 9.1 i 9.2 przedstawiamy oszacowania wartości zagrożonej dla indeksu WIG otrzymane za pomocą symulacji historycznej. Przez VaR short oznaczamy VaR dla pozycji krótkiej, a przez VaR long liczbę przeciwną do szacowanej wartości zagrożonej dla pozycji długiej. Pozwala to na podstawie jednego rysunku oceniać jakość oszacowań VaR jednocześnie dla pozycji długiej i krótkiej. Oznaczenia te będziemy stosować w tym i dalszych rozdziałach książki.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 9.1. WIG. Oszacowania VaR za pomocą symulacji historycznej, długość okna 250 obserwacji, poziom istotności: 0,05. Okres 2.01.1996–6.06.2003



Ilustracja 9.2. WIG20. Oszacowania VaR za pomocą symulacji historycznej, długość okna: 250 obserwacji, poziom istotności: 0,05. Okres 2.01.1996–6.06.2003



Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

9.2. Wyznaczanie wartości zagrożonej za pomocą kwantyli warunkowych

VaR jako kwantyl warunkowego rozkładu stóp zwrotu

Finansowe szeregi zwrotów wykazują pewne właściwości mające istotny wpływ na oszacowania VaR (zgrupowania zmienności, grube ogony), które są odzwierciedlane w zmieniających się w czasie rozkładach warunkowych. Z tego powodu, metody bardziej wyrafinowane niż symulacja historyczna, uwzględniające dynamikę zwrotów, preferują modelowanie VaR za pomocą kwantyli rozkładów warunkowych.

Niech $\mathcal{F}_t$ będzie zbiorem informacji dostępnych w dniu t. Jednodniowy warunkowy VaR na poziomie istotności, dla strony zajmującej pozycję długą w rozważanym instrumencie, można formalnie zdefiniować jako liczbę przeciwną do α-kwantyla warunkowego zwrotu:

$$\mathrm{VaR}^{l}_{t+1}(\alpha) = \sup\{v: P(r_{t+1} \le -v \mid \mathcal{F}_t) \ge \alpha\} \tag{9.3}$$

Dla strony zajmującej pozycję krótką, która ponosi stratę, gdy cena instrumentu wzrasta, jednodniowy VaR na poziomie istotności α definiujemy jako liczbę $\mathrm{VaR}^{s}_{t+1}(\alpha)$ określoną wzorem:

$$\mathrm{VaR}^{s}_{t+1}(\alpha) = \sup\{v: P(r_{t+1} \ge v \mid \mathcal{F}_t) \ge \alpha\} \tag{9.4}$$

Przy powyższym podejściu unikamy niejednoznaczności w definicji VaR w sytuacji, gdy dystrybuanta rozkładu warunkowego $r_{t+1} \mid \mathcal{F}_t$ nie jest rosnąca lub nie jest ciągła. Poza tym przypadkiem, definicje (9.3) i (9.4) mają równoważne postacie:

$$P(r_{t+1} \le -\mathrm{VaR}^{l}_{t+1}(\alpha) \mid \mathcal{F}_t) = \alpha \tag{9.5}$$

$$P(r_{t+1} \ge \mathrm{VaR}^{s}_{t+1}(\alpha) \mid \mathcal{F}_t) = \alpha \tag{9.6}$$

Ze wzorów (9.3) i (9.4) wynika, że $\mathrm{VaR}^{s}_{t+1}(\alpha)$ dla instrumentu o procesie zwrotu r_t, pokrywa się z $\mathrm{VaR}^{l}_{t+1}(\alpha)$ dla instrumentu o procesie zwrotu $-r_t$. W związku z tym, rozważania teoretyczne prowadzone są na ogół jedynie dla pozycji długiej. Jednak ze względu na często występującą w rozkładach zwrotów asymetrię (rozkłady zmiennych r_t i $-r_t$ nie są jednakowe), oszacowań empirycznych VaR dokonywać będziemy oddzielnie dla pozycji długiej i krótkiej.

Procentowy zwrot logarytmiczny aproksymuje procentową zmianę wartości pozycji finansowej, zatem przy naszym ujęciu $\mathrm{VaR}^{l}_{t+1}(\alpha)$ wyrażony jest w procentach.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

9.3. Zastosowanie parametrycznych modeli zmienności do wyznaczania VaR

Załóżmy, że procentowy zwrot logarytmiczny z rozważanego instrumentu finansowego generowany jest przez proces:

$$r_t = \mu_t + y_t \tag{9.7}$$

$$y_t = \sigma_t \ \varepsilon_t \tag{9.8}$$

gdzie $\mu_t = E(r_t \mid \mathcal{F}_{t-1})$, a $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0,1)$

Przypuśćmy, że dystrybuanta zmiennej ε_t jest rosnąca i ciągła. Jeśli z_α oznacza α-kwantyl zmiennej ε_t, to jednodniowy VaR dla długiej lub krótkiej pozycji na poziomie istotności α wyraża się, odpowiednio, wzorem:

$$\text{VaR}^l_{t+1}(\alpha) = -\mu_t(1) - \sigma_t(1)\, z_\alpha \tag{9.9}$$

$$\text{VaR}^s_{t+1}(\alpha) = \mu_t(1) + \sigma_t(1)\, z_{1-\alpha} \tag{9.10}$$

przy czym $\mu_t(1)$ i $\sigma_t(1)$ oznaczają prognozy jeden dzień naprzód, odpowiednio, średniej warunkowej i zmienności. Przy naszych założeniach, dla rozkładu symetrycznego zachodzi równość $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$. Zatem $(-\text{VaR}^l_{t+1}(\alpha))$ i $\text{VaR}^s_{t+1}(\alpha)$ są w takim wypadku symetryczne względem prognozy $\mu_t(1)$ średniej warunkowej.

VaR a prognozy zmienności

Przy powyższym podejściu do wyznaczania VaR ogromne znaczenie ma jakość prognoz zmienności. Zależy ona od zdolności prognostycznych przyjętego modelu zmienności. Na przykład spośród modeli GARCH teoretycznie największe w tym względzie możliwości techniczne ma model APARCH ze skośnym rozkładem *t* Studenta, gdyż może on uwzględniać potencjalną asymetrię innowacji standaryzowanych i efekt dźwigni, a ponadto zagnieżdża siedem innych modeli z rodziny GARCH jako szczególne przypadki. Przy szacowaniu VaR napotykamy ponownie problemy związane z wpływem dobrego dopasowania modelu w próbie na jakość prognoz oraz związaną z tym kwestię stabilności współczynników modelu. Pewne rozwiązanie stanowi tu częsta reestymacja parametrów. Jednak w takim wypadku pozostają wątpliwości co do wyboru długości okna, na podstawie którego model jest szacowany. Powyższe spostrzeżenia pozwalają na zaproponowanie, jako kolejnego kryterium adekwatności modelu zmienności, jakości oszacowań wartości narażonej na ryzyko, uzyskanych na podstawie prognoz zmienności otrzymanych za pomocą tego modelu.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

9.4. Metodologia RiskMetrics

RiskMetrics

W swej najprostszej postaci popularna i powszechnie stosowana przez praktyków metodologia szacowania wartości zagrożonej – RiskMetrics (1994) sprowadza się do zastosowania modelu postaci:

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t \tag{9.11}$$

$$\varepsilon_t \sim \text{iid}(0,1) \tag{9.12}$$

$$\sigma_t^2 = (1 - \lambda)\, r_{t-1}^2 + \lambda \sigma_{t-1}^2 \tag{9.13}$$

gdzie $0 < \lambda < 1$

Parametr λ nie jest estymowany. Przy szacowaniu VaR na 1 dzień naprzód przyjmuje się, że $\lambda = 0{,}94$. Szczegółowe informacje i analizy można znaleźć w dokumencie technicznym (RiskMetrics 1996).

Zauważmy, że model określony równaniami (9.11)–(9.13) odpowiada modelowi IGARCH(1,1) z ustalonym współczynnikiem $1 - \lambda$ przy kwadracie stopy zwrotu oraz stałą ω równą zeru. Milcząco przyjęte jest też założenie, że średnia warunkowa stopy zwrotu jest równa zero.

Mimo że metoda ta jest mało wyrafinowana, bardzo często daje zadowalające rezultaty (choć jest też bardzo krytykowana). Równanie rekurencyjne (9.13) można przekształcić do postaci:

$$\sigma_t^2 = (1-\lambda)\sum_{i=1}^{m} \lambda^{i-1} r_{t-i}^2 + \lambda^m \sigma_{t-m}^2 \tag{9.14}$$

Dla dużych wartości m, składnik $\lambda^m \sigma_{t-m}^2$ jest na tyle mały, że można go pominąć; w takiej sytuacji σ_t^2 jest w przybliżeniu średnią ważoną opóźnionych kwadratów zwrotów, przy czym wagi maleją wykładniczo w tempie λ. Na przyszłą zmienność mają zatem wpływ (malejący wykładniczo ze wzrostem opóźnienia) kwadraty zwrotów z dowolnie dalekiej przeszłości.

9.5. Test Kupca

testowanie wsteczne VaR

Model wykorzystywany do szacowania VaR, zwłaszcza jeżeli ma być stosowany w praktyce, powinien być weryfikowany w sposób statystyczny, pozwalający na porównanie go z innymi możliwymi do wykorzystania metodami. Podstawową techniką

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

weryfikacji modelu jest tzw. *backtesting*, czyli testowanie wsteczne. Metoda ta sprowadza się do oceny liczby przekroczeń oszacowań VaR z przeszłości. Jeżeli szacujemy VaR na poziomie istotności równym α, to po porównaniu wyznaczonych przez model poziomów wartości zagrożonej z rzeczywiście zrealizowanymi zwrotami z portfela w całej próbie, udział przekroczeń straty wyznaczonej przez model przez rzeczywiście zrealizowaną stratę powinien wynosić α.

Jeżeli udział błędów jest znacznie większy od założonego, to znaczy, że model niedoszacowuje wielkość VaR (wyznaczany przez niego poziom straty jest za mały, w wyniku czego za często zdarzają się przekroczenia). Zbyt mała liczba przekroczeń oznacza z kolei, że model przeszacowuje wartość zagrożoną (wyznacza większą wartość przyszłej możliwej straty, niż jest konieczne, co powoduje, iż liczba przekroczeń jest za mała).

Istotne znaczenie ma także rozkład przekroczeń w testowanej próbie. Model może być uznany za poprawny, jeśli błędy są rozmieszczone w miarę równomiernie w całej próbie. Nie powinna pojawiać się sytuacja, w której przekroczenia występują seriami w krótkich odstępach czasu. Oznaczałoby to, że model ogólnie przeszacowuje VaR, ale nie spełnia swej funkcji zabezpieczającej w trudnych (mających szczególne znaczenie przy zarządzaniu ryzykiem) sytuacjach (na przykład przy wzroście zmienności na rynku).

W najbardziej popularnym teście za wskaźnik jakości oszacowań VaR przyjmuje się jednak udział przekroczeń zrealizowanych zwrotów. Z definicji udział f_l przekroczeń dla pozycji długiej jest równy stosunkowi liczby zwrotów mniejszych od $-\mathrm{VaR}^{l}_{t+1}(\alpha)$, do liczby wszystkich rozpatrywanych zwrotów. Podobnie jest w wypadku pozycji krótkiej: f_s jest stosunkiem liczby zwrotów przekraczających $\mathrm{VaR}^{s}_{t+1}(\alpha)$ do liczby wszystkich rozpatrywanych zwrotów. Ponieważ wyliczanie empirycznego udziału przekroczeń jest równoważne z określaniem ciągów złożonych z zer i jedynek, możliwe jest testowanie hipotezy zerowej H_0: $f = \alpha$, przeciwko alternatywie H_1: $f \neq \alpha$, przy czym f oznacza f_l albo f_s. Jest to test ilorazu wiarygodności ze statystyką:

test Kupca; hipoteza zerowa: udział przekroczeń zgodny z założonym

$$LR = 2\left(\ln\left(\left(\frac{N}{T}\right)^{N}\left(1-\frac{N}{T}\right)^{T-N}\right)-\ln\left(\alpha^{N}(1-\alpha)^{T-N}\right)\right) \tag{9.15}$$

gdzie N jest liczbą przekroczeń VaR przy liczbie obserwacji T.

W literaturze poświęconej modelom VaR test ten nosi nazwę testu Kupca (Kupiec 1995). Przy prawdziwej hipotezie zerowej statystyka LR ma asymptotycznie rozkład $\chi^2(1)$. Należy zwrócić uwagę na fakt, że hipoteza zerowa testu Kupca jest odrzucana zarówno w wypadku modelu wyliczającego VaR w sposób nadmiernie niefrasobliwy (niedoszacowanie potencjalnej straty), jak i dla modelu nadmiernie konserwatywnego (przeszacowanie VaR).

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

W rezultatach badań empirycznych prezentowanych w podrozdziale 9.6, oprócz wyników testu Kupca przedstawiamy wyliczenia wartości dwóch miar ryzyka. Pierwszą z nich jest tzw. oczekiwany niedobór (*expected short fall* – ESF1), zdefiniowany jako wartość oczekiwana straty, pod warunkiem że strata będzie większa niż VaR (Scaillet 2004). Druga ze stosowanych miar (ESF2), jest średnią arytmetyczną stosunków wartości zwrotów, dla których nastąpiło przekroczenie, do odpowiednich wartości VaR, czyli średnim stosunkiem zrealizowanej straty do straty oczekiwanej. Więcej informacji o tych i innych miarach ryzyka zamieszczamy w rozdziale 13.

oczekiwany niedobór

9.6. Test DQT Engle'a i Manganellego

Test Kupca ocenia model, uwzględniając zarówno zbyt dużą, jak i zbyt małą liczbę przekroczeń, co jest jego zaletą. Jego wadą jest jednak to, że nie uwzględnia rozłożenia przekroczeń w próbie. Dobrze działający model VaR powinien charakteryzować się brakiem autokorelacji w szeregach wartości funkcji wkaźnikowej opisującej przekroczenia $I(r_t < -\mathrm{VaR}_t^l(\alpha))$ dla pozycji długiej i analogicznie $I(r_t > \mathrm{VaR}_t^s(\alpha))$ dla pozycji krótkiej. Zaproponowany przez Engle'a i Manganellego (1999) test kwantyli dynamicznych (*Dynamic Quantile Test* – DQT) został skonstruowany właśnie w celu oceny oszacowań VaR pod tym kątem.

test kwantyli dynamicznych – DQT

Przyjmujemy następujące oznaczenia: $Hit_t^l(\alpha) = I(r_t < -\mathrm{VaR}_t^l(\alpha)) - \alpha$ oraz $Hit_t^s(\alpha) = I(r_t > \mathrm{VaR}_t^l(\alpha)) - (1 - \alpha)$. W celu skrócenia zapisu przyjmiemy, że $Hit_t(\alpha)$ oznacza $Hit_t^l(\alpha)$, gdy rozważamy pozycję długą, i $Hit_t^s(\alpha)$ dla pozycji krótkiej.

Test DQT bada łącznie dwie hipotezy:

1) H_{01}: $E(Hit_t(\alpha)) = 0$,
2) H_{02}: zmienna $Hit_t(\alpha)$ jest nieskorelowana ze zmiennymi włączonymi do zbioru informacji.

Engle i Manganelli (2001) twierdzą, że łączne testowanie hipotez H_{01} i H_{02} może być przeprowadzone na podstawie sztucznej regresji:

$$Hit_t(\alpha) = \mathbf{X}\,\boldsymbol{\lambda} + \varepsilon_t \tag{9.16}$$

gdzie $\mathbf{X}$ jest macierzą o wymiarach $T \times k$, w której w pierwszej kolumnie są jedynki, następne p kolumn zawiera zmienne $Hit_{t-1}, \ldots, Hit_{t-p}$, a $k - p - 1$ pozostałych kolumn – dodatkowe zmienne niezależne (w tym VaR_t).

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Engle i Manganelli (1999) pokazują ponadto, że statystyka testu DQT

$$\frac{\hat{\boldsymbol{\lambda}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\lambda}}}{\alpha(1-\alpha)} \tag{9.17}$$

gdzie $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ oznacza oszacowanie MNK wektora parametrów $\boldsymbol{\lambda}$, ma asymptotycznie rozkład $\chi^2(k)$.

9.7. Od teorii do praktyki

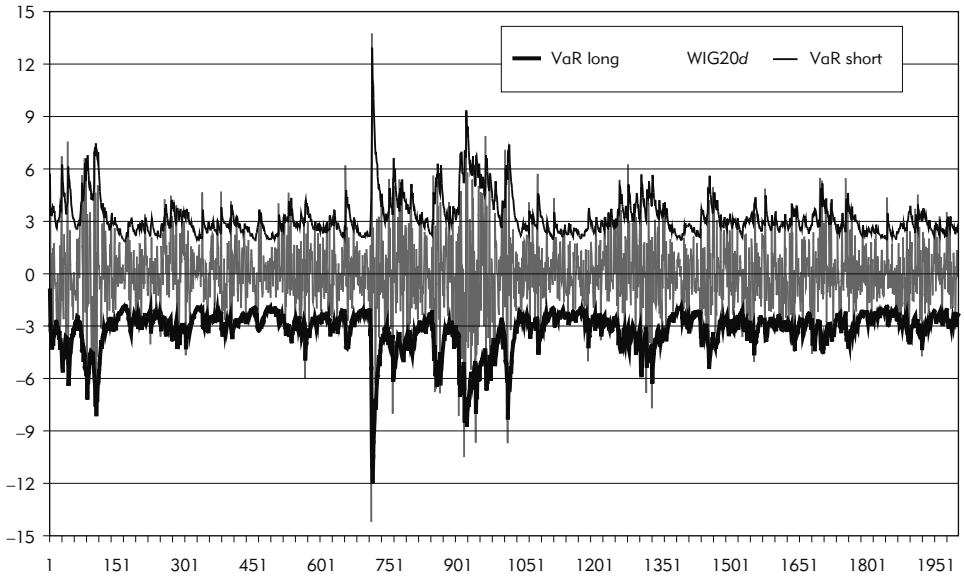
Przedstawimy teraz i przetestujemy wyliczenia VaR dla indeksu WIG20 oraz kursu USD/PLN oparte na oszacowaniach zmienności wyznaczonych w poprzednich rozdziałach. W prezentowanym tu przykładzie empirycznym wyznaczamy wartość zagrożoną na poziomie istotności α równym 5%, 2,5% i 1%. Zarówno statystyka Kupca, jak i wartości oczekiwanego niedoboru (ESF1, ESF2) są stosowane i do oszacowań VaR w próbie, i do prognoz VaR. O ile test Kupca może być przydatny w ustalaniu rankingu modeli VaR, o tyle miary ESF1 i ESF2 formalnie nie są do tego celu przeznaczone. Niosą one jednak użyteczne dla inwestora informacje o tym, ile może średnio stracić, jeżeli model zawiedzie.

Zaczniemy od przedstawienia oszacowań wartości zagrożonej dla indeksu WIG20. Wyliczeń VaR dokonujemy, wykorzystując oszacowania zmienności w próbie (okres próby: 2.01.1995–31.12.2002) i jednodniowe prognozy zmienności na okres 5 miesięcy (okres prognozy: 2.01.2003–30.05.2003). Okres prognozy jest więc krótszy od zazwyczaj przyjmowanego okresu długości jednego roku. Wykresy przedstawiają VaR na poziomie istotności 0,05. Jak już zaznaczaliśmy, na wszystkich wykresach $(-\mathrm{VaR}^{l}_{t+1}(\alpha))$ oznaczony jest przez „VaR long", a $\mathrm{VaR}^{s}_{t+1}(\alpha)$ przez „VaR short".

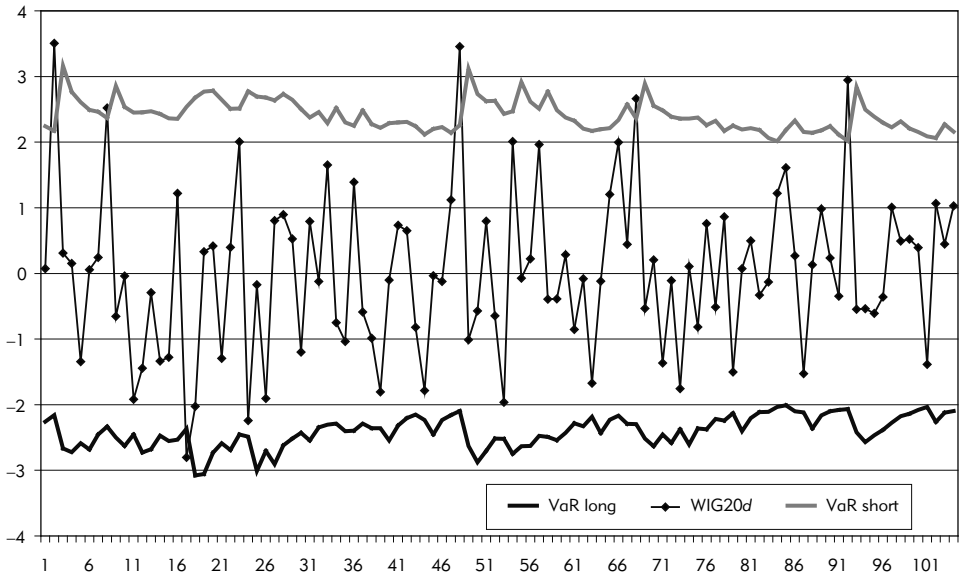
Spośród modeli GARCH dopasowanych do szeregów zwrotów indeksu WIG20, do szacowania VaR wybrany został AR(1)-GARCH(1,1) opisany w tabeli 3.5. Oszacowania wartości zagrożonej za pomocą wyestymowanej z tego modelu zmienności w próbie są dobrej jakości (ilustracja 9.3, tabela 9.1). Hipoteza zerowa testu Kupca nie została odrzucona w żadnym przypadku. Udział przekroczeń jest bliski założonemu. W wypadku oszacowań na podstawie prognoz zmienności dla długiej pozycji VaR jest przeszacowany. Wyraźnie jest to widoczne na ilustracji 9.4.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 9.3. WIG20. Zwroty i oszacowania VaR na podstawie zmienności w próbie wyestymowanej z modelu AR(1)–GARCH (1,1), poziom istotności 0,05. Okres 2.01.1995–31.12.2002



Ilustracja 9.4. WIG20. Zwroty i oszacowania VaR na podstawie prognoz zmienności z modelu AR(1)-GARCH (1,1), poziom istotności 0,05. Okres prognozy 2.01.2003–30.05.2003



Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Tabela 9.1. WIG20. Ocena jakości oszacowań VaR opartych na zmienności wyestymowanej za pomocą modelu AR(1)–GARCH(1,1)

	Model i liczba obserwacji	Pozycja	α	Liczba przekroczeń	Udział przekroczeń	Statystyka Kupca	*p*-wartość	ESF1	ESF2
W próbie	GARCH 1996	krótka	0,05	113	0,0566	1,7657	0,1839	4,1510	1,3276
		krótka	0,025	57	0,0286	0,9914	0,3194	4,9273	1,2524
		krótka	0,01	21	0,0105	0,0538	0,8166	5,5375	1,2052
	GARCH 1996	długa	0,05	86	0,0431	2,1030	0,1470	4,3968	1,3693
		długa	0,025	45	0,0225	0,5101	0,4751	5,2525	1,2875
		długa	0,01	21	0,0105	0,0538	0,8166	6,5164	1,2201
Prognoza	GARCH 104	krótka	0,05	5	0,0481	0,0082	0,9279	3,0177	1,3595
		krótka	0,025	3	0,0288	0,0602	0,8062	3,3028	1,2436
		krótka	0,01	2	0,0192	0,7048	0,4012	3,4815	1,0240
	GARCH 104	długa	0,05	1	0,0096	5,2787	0,0216	2,8040	1,1851
		długa	0,025	0	0,0000	5,2661	0,0217	–	–
		długa	0,01	0	0,0000	2,0905	0,1482	–	–

Nieoczekiwanie trafne oszacowania VaR uzyskuje się, opierając się na zmienności wyznaczonej za pomocą modeli dwuliniowych omówionych w rozdziale 7 (tabela 7.2). Zaskoczenie wyrażone w pierwszym zdaniu tego akapitu związane jest z faktem, że modele dwuliniowe dość trudno dopasowywały się do rozważanych szeregów i prognozy zmienności uzyskane przy ich użyciu miały nie najlepszą jakość.

Tabela 9.2. WIG20*d*. Ocena jakości oszacowań VaR opartych na zmienności wyestymowanej za pomocą modelu dwuliniowego

	Model i liczba obserwacji	Pozycja	α	Liczba przekroczeń	Udział przekroczeń	Statystyka Kupca	*p*-wartość	ESF1	ESF2
W próbie	BL 1996	krótka	0,05	104	0,0521	0,1863	0,6683	4,0774	1,3209
		krótka	0,025	52	0,0261	0.0894	0,7649	4,6671	1,2465
		krótka	0,01	19	0,0095	0,0474	0,8277	5,0494	1,2048
	BL 1996	długa	0,05	102	0,0511	0,0507	0,8219	4,2989	1,3606
		długa	0,025	51	0,0256	0,0247	0,8751	5,2047	1,2861
		długa	0,01	23	0,0115	0,4458	0,5043	6,3056	1,2293

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Prognoza	BL 104	krótka	0,05	5	0,0481	0,0082	0,9279	3,0177	1,3425
		krótka	0,025	3	0,0288	0,0602	0,8062	3,3028	1,2253
		krótka	0,01	1	0,0096	0,0016	0,9684	3,5060	1,0302
	BL 104	długa	0,05	1	0,0096	5,2787	0,0216	2,8040	1,1678
		długa	0,025	0	0,0000	5,2661	0,0217	–	–
		długa	0,01	0	0,0000	2,0905	0,1482	–	–

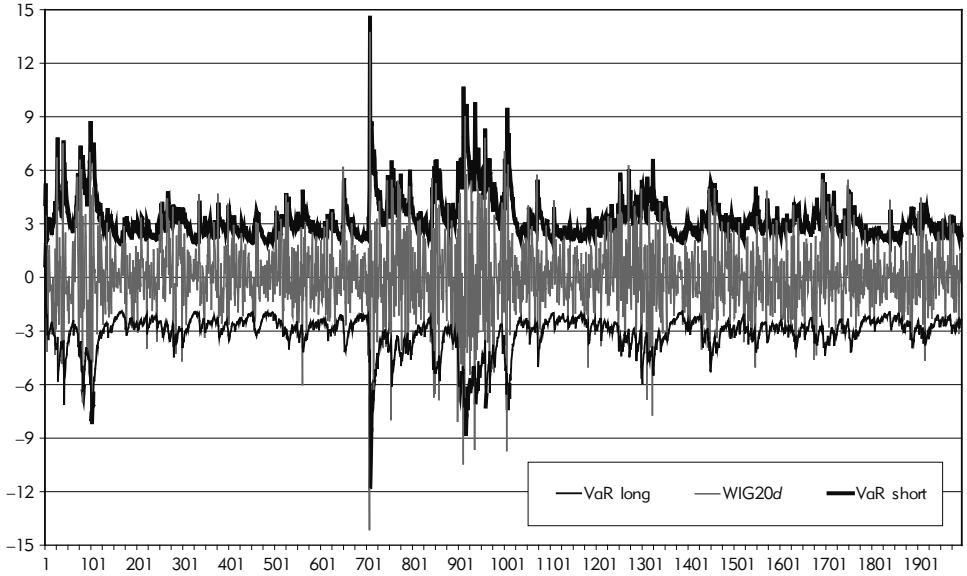
Udział przekroczeń VaR oszacowanego dla indeksu WIG20 na podstawie zmienności w próbie z modelu dwuliniowego (tabela 9.2) prawie idealnie pokrywa się z poziomem istotności. Test Kupca nie odrzuca hipotezy zerowej w żadnym przypadku. Ilustracja 9.5 dobrze obrazuje jakość tych oszacowań. Podobnie jest w wypadku prognoz zmienności i pozycji krótkiej. Jednak dla pozycji długiej występuje przeszacowanie VaR, co jest widoczne również na ilustracji 9.6.

Widzimy więc, że oszacowania VaR dla indeksu WIG20, dokonane opisaną w podrozdziale 9.3 metodą opartą na estymowaniu zmienności za pomocą różnego typu modeli zmienności, są dość dobre, jeśli dokonywane są w próbie. Nieco gorsze są w wypadku prognoz zmienności. Jest to naturalne, zwłaszcza jeśli weźmie się pod uwagę fakt, że okres, na który wyznaczaliśmy prognozy, cechował się stałą, ale nie w pełni wychwytywaną przez modele tendencją do obniżania się zmienności. Z tego względu wyznaczone wielkości VaR dość często są przeszacowane, zwłaszcza w wypadku pozycji długiej. Jakość oszacowań VaR uzyskanych za pomocą modeli AR(1)-GARCH(1,1) i dwuliniowego jest porównywalna.

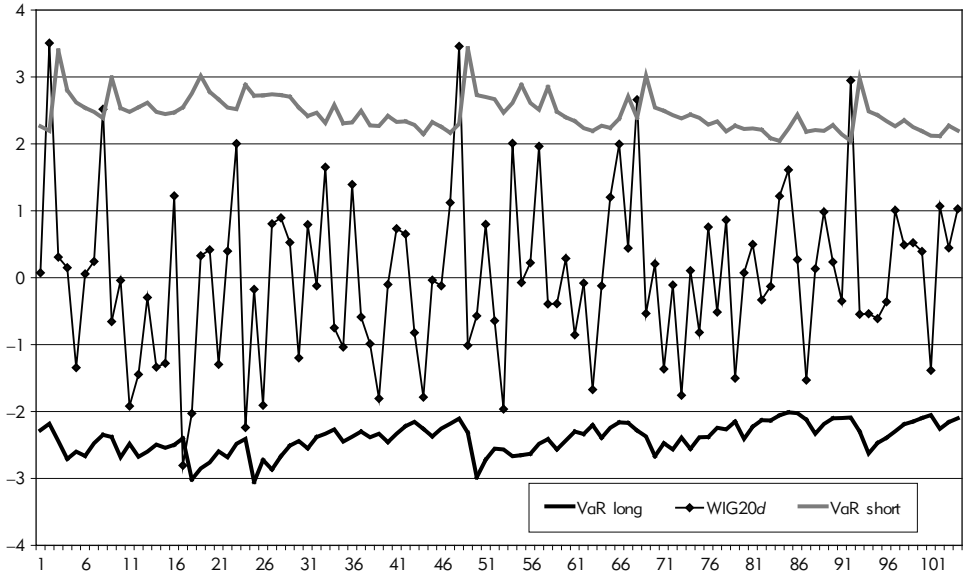
Przedstawimy teraz podobną analizę dla kursu walutowego USD/PLN. Wartości VaR wyznaczone dla kursu USD/PLN na podstawie oszacowań zmienności uzyskanych za pomocą modelu dwuliniowego (tabele 7.3 i 7.4), zarówno w próbie, jak i na podstawie prognozy, są trafne. Udział przekroczeń jest bardzo bliski założonemu. Na ilustracjach 9.7–9.10 widać, że przekroczenia są rozłożone dość równomiernie. W wypadku oszacowań dokonywanych dla pozycji długiej na podstawie prognozy zmienności, VaR jest niedoszacowany, ale test nie odrzuca hipotezy zerowej. Wyniki uzyskane za pomocą modelu dwuliniowego dopasowanego do krótkiego szeregu zwrotów są nieco gorsze, ale również akceptowalne.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 9.5. WIG20. Zwroty i oszacowania VaR na podstawie zmienności w próbie wyliczonej z modelu dwuliniowego



Ilustracja 9.6. WIG20*d*. Zwroty i oszacowania VaR na podstawie prognoz zmienności z modelu dwuliniowego



Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Tabela 9.3. USD/PLN. Ocena jakości oszacowań VaR opartych na zmienności wyestymowanej za pomocą modelu dwuliniowego dla krótkiego szeregu zwrotów (tabela 7.3)

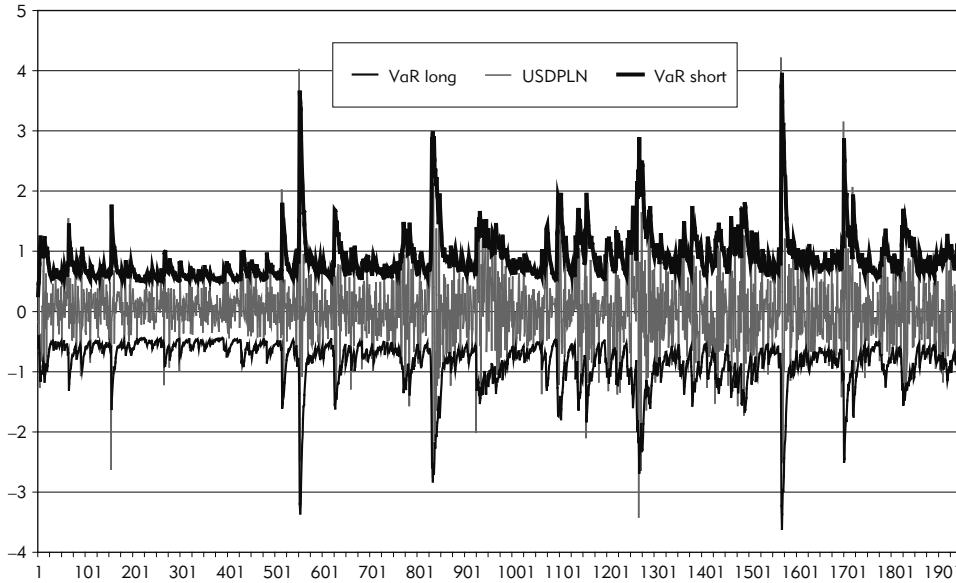
	Model i liczba obserwacji	Pozycja	α	Liczba przekroczeń	Udział przekroczeń	Statystyka Kupca	*p*-wartość	ESF1	ESF2
W próbie	BL 1952	krótka	0,05	98	0,0502	0,0017	0,9669	1,1893	1,3701
		krótka	0,025	40	0,0205	1,7326	0,1881	1,5347	1,4022
		krótka	0,01	19	0,0097	0,0141	0,9054	1,9646	1,3396
	BL 1952	długa	0,05	105	0,0538	0,5770	0,4475	1,0733	1,3894
		długa	0,025	49	0,0251	0,0008	0,9769	1,2625	1,3426
		długa	0,01	18	0,0092	0,1228	0,7261	1,3332	1,3111
Prognoza	BL 108	krótka	0,05	5	0,0463	0,0319	0,8581	1,1332	1,4197
		krótka	0,025	3	0,0278	0,0330	0,8551	1,4590	1,3266
		krótka	0,01	1	0,0093	0,0061	0,9376	1,7941	1,2792
	BL 108	długa	0,05	9	0,0833	2,1227	0,1451	1,1410	1,5852
		długa	0,025	5	0,0463	1,6125	0,2042	1,3842	1,5372
		długa	0,01	3	0,0278	2,3246	0,1273	1,5924	1,3965

Tabela 9.4. USD/PLN. Ocena jakości oszacowań VaR opartych na zmienności wyestymowanej za pomocą modelu dwuliniowego dla krótkiego szeregu zwrotów

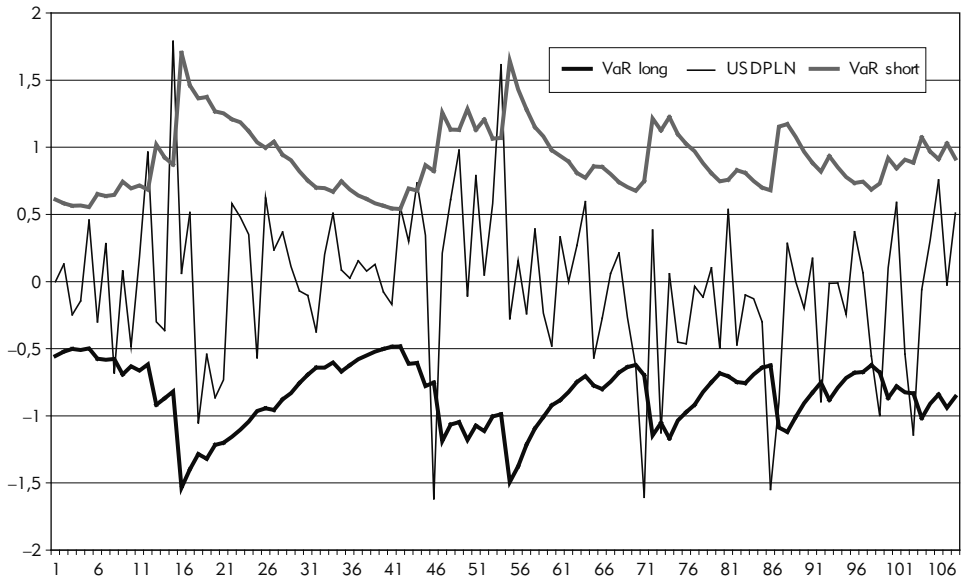
	Model i liczba obserwacji	Pozycja	α	Liczba przekroczeń	Udział przekroczeń	Statystyka Kupca	*p*-wartość	ESF1	ESF2
W próbie	BL 700	krótka	0,05	40	0,0571	0,7202	0,3961	1,3498	1,4391
		krótka	0,025	17	0,0243	0,0148	0,9032	1,7462	1,5033
		krótka	0,01	7	0,0100	0,0000	1,0000	2,3357	1,5825
	BL 700	długa	0,05	30	0,0429	0,7885	0,3746	1,3640	1,2441
		długa	0,025	12	0,0171	1,9891	0,1584	1,6683	1,1993
		długa	0,01	4	0,0057	1,5360	0,2152	2,2517	1,1160
Prognoza	BL 108	krótka	0,05	3	0,0278	1,3290	0,2490	1,4590	1,6352
		krótka	0,025	2	0,0185	0,2042	0,6513	1,7041	1,4595
		krótka	0,01	2	0,0185	0,6327	0,4264	1,7041	1,1462
	BL 108	długa	0,05	5	0,0463	0,0319	0,8581	1,3842	1,5055
		długa	0,025	3	0,0278	0,0330	0,8558	1,5924	1,4250
		długa	0,01	3	0,0278	2,3246	0,1273	1,5924	1,1366

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 9.7. USD/PLN. Zwroty i oszacowania VaR na podstawie zmienności w próbie wyznaczonej za pomocą modelu dwuliniowego dopasowanego do długiego szeregu zwrotów

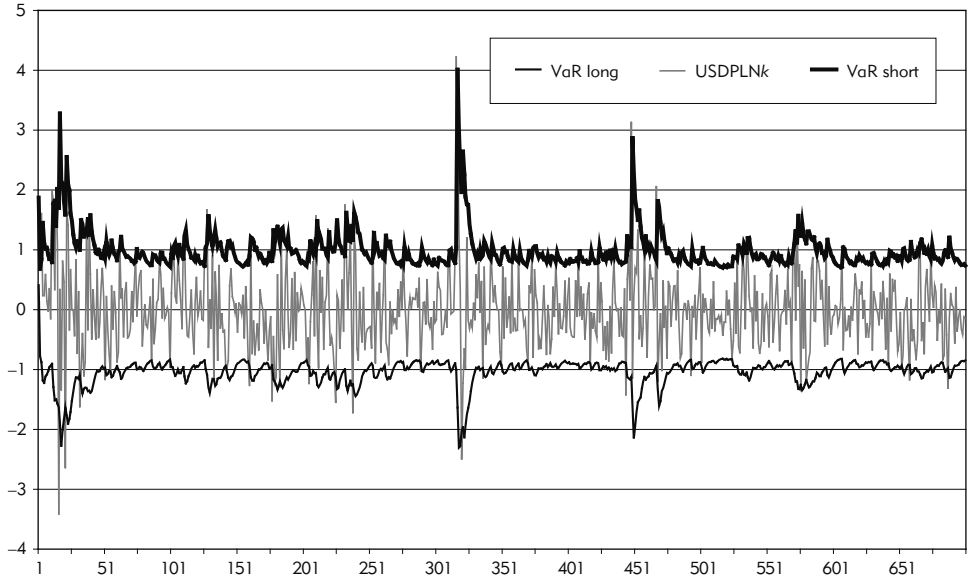


Ilustracja 9.8. USD/PLN. Zwroty i oszacowania VaR na podstawie prognoz zmienności wyznaczonych za pomocą modelu dwuliniowego dopasowanego do długiego szeregu zwrotów

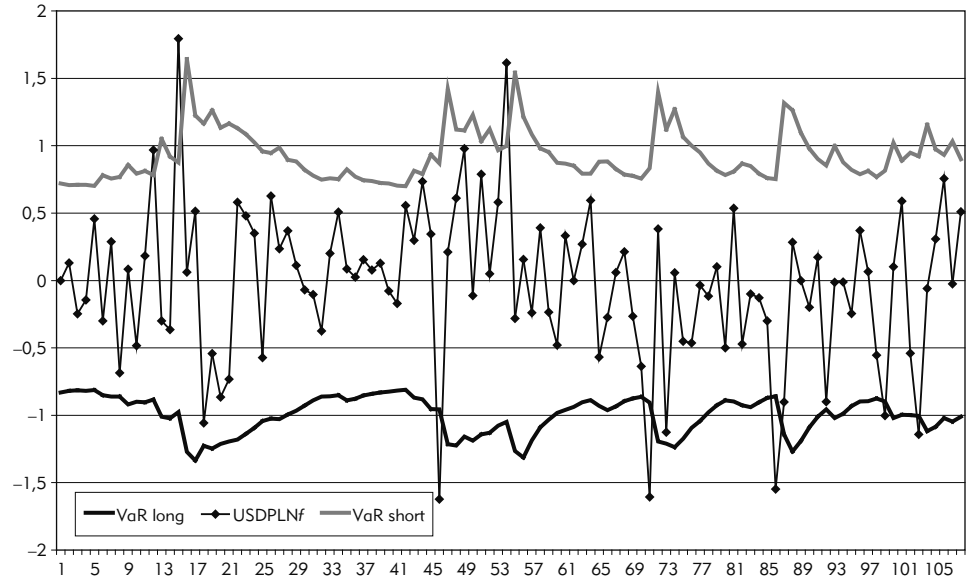


Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 9.9. USD/PLN. Zwroty i oszacowania VaR na podstawie zmienności w próbie wyznaczonej za pomocą modelu dwuliniowego dopasowanego do krótkiego szeregu zwrotów

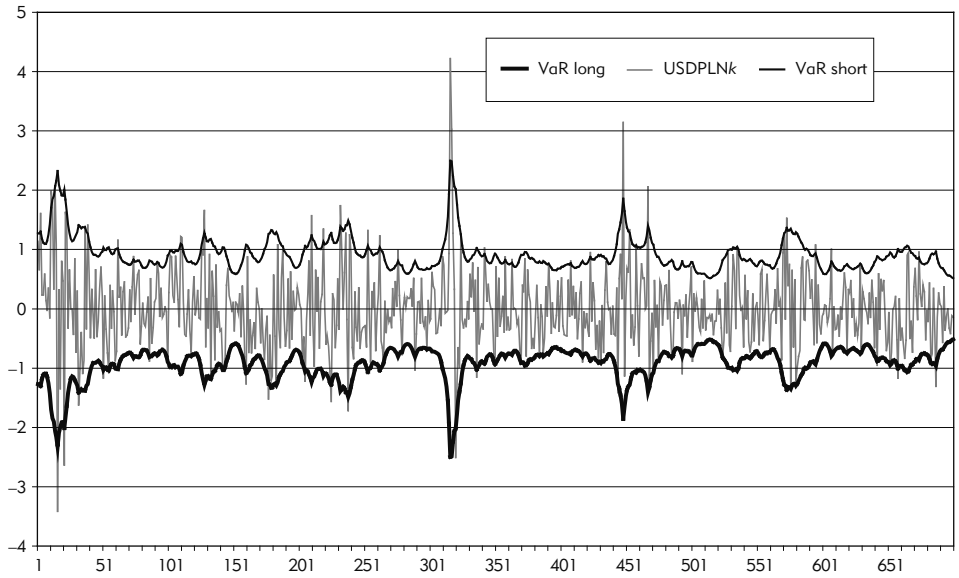


Ilustracja 9.10. USD/PLN. Zwroty i oszacowania VaR na podstawie prognoz zmienności wyznaczonych za pomocą modelu dwuliniowego dopasowanego do krótkiego szeregu zwrotów

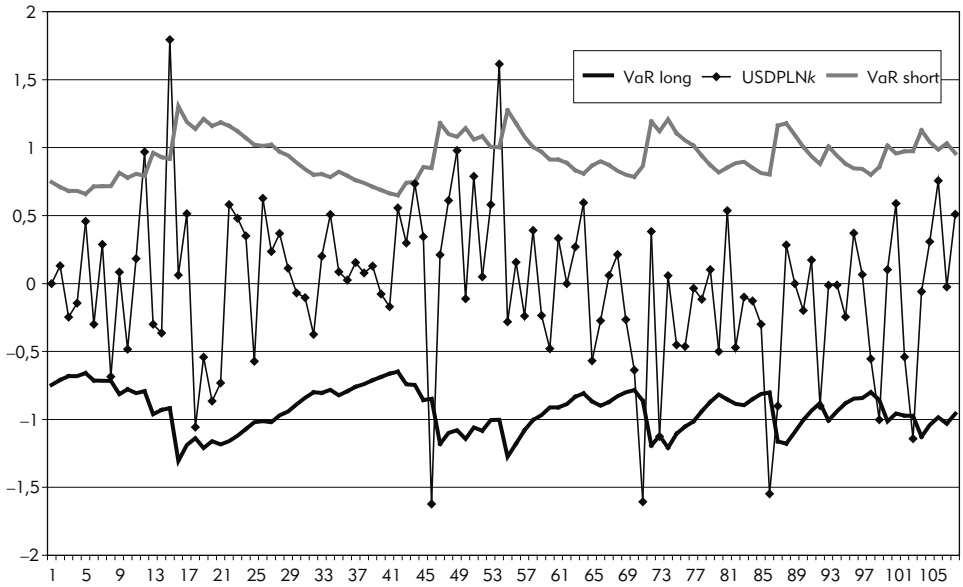


Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 9.11. USD/PLN. Zwroty i oszacowania VaR na podstawie prognoz zmienności uzyskanych za pomocą modelu SV dla krótkiego szeregu zwrotów



Ilustracja 9.12. USD/PLN. Zwroty i oszacowania VaR na podstawie prognoz zmienności uzyskanych za pomocą modelu SV dla krótkiego szeregu zwrotów



Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Biorąc pod uwagę oceny zmienności kursu USD/PLN uzyskane za pomocą modelu zmienności stochastycznej SV dla krótkiego szeregu zwrotów (tabela 9.5 i ilustracje 9.11 i 9.12), dostajemy ponownie lepsze wyniki testu Kupca dla VaR z okresu prognozy niż dla okresu próby. Nie ma wyraźnego zróżnicowania między jakością oszacowań wartości zagrożonej dla pozycji krótkiej i długiej.

Tabela 9.5. USD/PLN. Ocena jakości oszacowań VaR opartych na zmienności wyestymowanej za pomocą modelu SV dla krótkiego szeregu zwrotów

	Model i liczba obserwacji	Pozycja	α	Liczba przekroczeń	Udział przekroczeń	Statystyka Kupca	*p*-wartość	ESF1	ESF2
W próbie	SV 700	krótka	0,05	31	0,0443	0,4996	0,4797	1,4848	1,1895
		krótka	0,025	13	0,0186	1,3011	0,2540	1,9223	1,1157
		krótka	0,01	3	0,0043	2,9393	0,0865	3,1439	1,1449
	SV 700	długa	0,05	27	0,0386	2,0823	0,1490	1,3481	1,1606
		długa	0,025	8	0,0114	6,6075	0,0102	1,8865	1,0966
		długa	0,01	1	0,0014	8,1600	0,0043	3,4125	1,0383
Prognoza	SV 108	krótka	0,05	3	0,0278	1,3290	0,2490	1,4590	1,5954
		krótka	0,025	3	0,0278	0,0330	0,8558	1,4590	1,3389
		krótka	0,01	2	0,0185	0,6327	0,4264	1,7041	1,2597
	SV 108	długa	0,05	7	0,0648	0,4582	0,4985	1,2781	1,4388
		długa	0,025	3	0,0278	0,0330	0,8558	1,5924	1,5952
		długa	0,01	3	0,0278	2,3246	0,1273	1,5924	1,3440

Model GJR-GARCH(1,1) należał do najlepiej dopasowanych modeli zmienności dla zwrotów kursu USDPLN (tabela 4.5). Również oszacowania VaR uzyskane z wykorzystaniem otrzymanych za jego pomocą oszacowań zmienności w próbie oraz prognoz są bardzo dobrej jakości (tabela 9.6). W wypadku prognoz liczba przekroczeń dla pozycji krótkiej jest nieco niższa od założonej, a dla pozycji długiej – nieco wyższa. Ilustracje 9.13 i 9.14 pozwalają na ocenę rozłożenia przekroczeń w całym analizowanym okresie.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 9.13. USD/PLN. Zwroty i oszacowania VaR na podstawie zmienności w próbie uzyskanej za pomocą modelu GJR z dodatkową zmienną objaśniającą *switch* (długi szereg zwrotów)

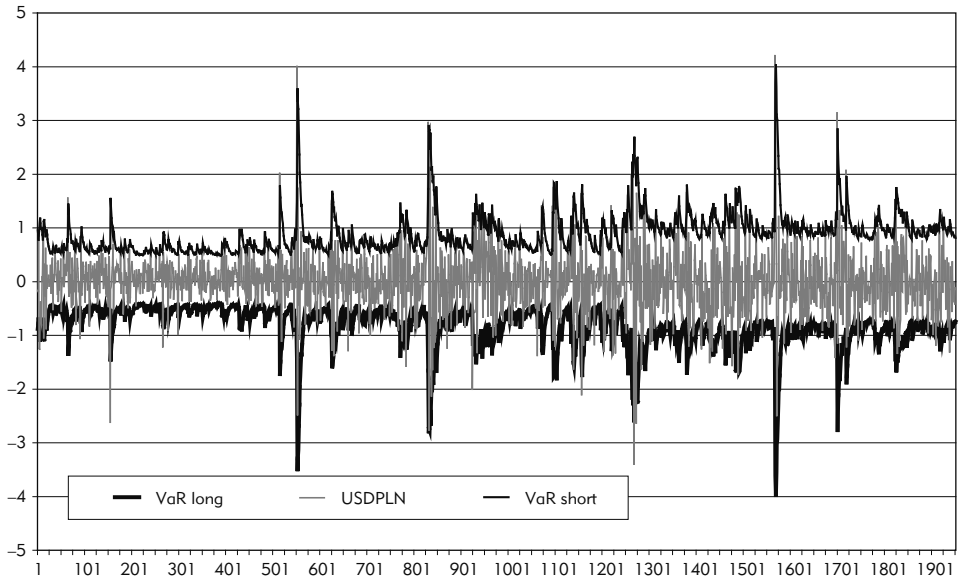
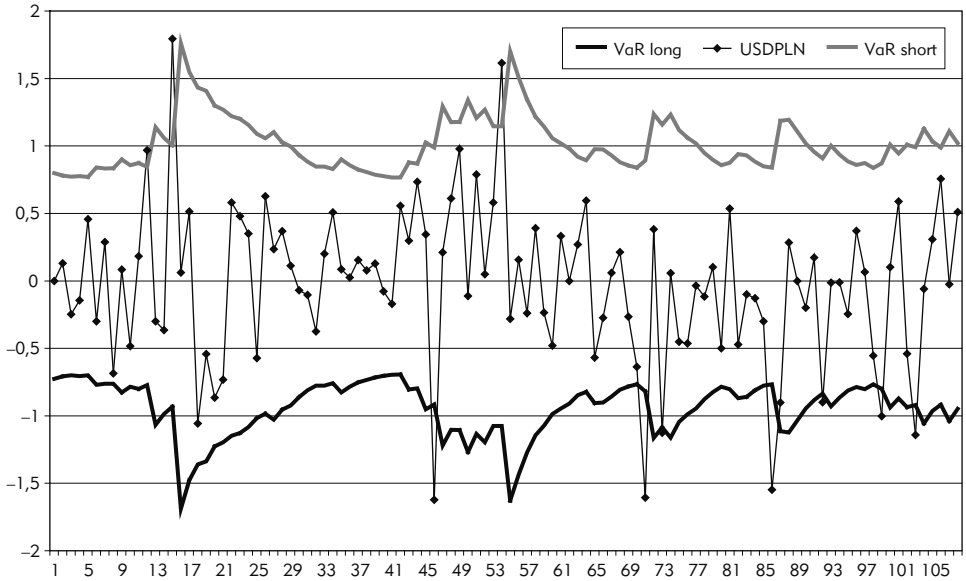


Tabela 9.6. USD/PLN. Ocena jakości oszacowań VaR opartych na zmienności wyestymowanej za pomocą modelu GJR z dodatkową zmienną objaśniającą *switch*

	Model i liczba obserwacji	Pozycja	α	Liczba przekroczeń	Udział przekroczeń	Statystyka Kupca	*p*-wartość	ESF1	ESF2
W próbie	GJR *switch* 1952	krótka	0,05	97	0,0497	0,0039	0,9503	1,1901	1,3581
		krótka	0,025	40	0,0205	1,7326	0,1881	1.5566	1,3837
		krótka	0,01	18	0,0092	0,1228	0,7261	1,9833	1,3645
	GJR *switch* 1952	długa	0,05	104	0,0533	0,4392	0,5106	1,0856	1,3838
		długa	0,025	42	0,0215	1,0192	0,3127	1,2760	1,3930
		długa	0,01	15	0,0077	1,1489	0,2838	1,3370	1,4226
Prognoza	GJR *switch* 108	krótka	0,05	3	0,0278	1,3290	0,2490	1,4590	1,4470
		krótka	0,025	2	0,0185	0,2042	0,6513	1,7041	1,2784
		krótka	0,01	1	0,0093	0,0061	0,9376	1,7941	1,1225
	GJR *switch* 108	długa	0,05	7	0,0648	0,4582	0,4985	1,2781	1,4800
		długa	0,025	3	0,0278	0,0330	0,8558	1,5924	1,5104
		długa	0,01	3	0,0278	2,3246	0,1273	1,5924	1,1687

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 9.14. USD/PLN. Zwroty i oszacowania VaR na podstawie prognozy zmienności uzyskanej za pomocą modelu GARCH z dodatkową zmienną objaśniającą *switch* (długi szereg zwrotów)



Wydaje się, że uzyskane przez nas oszacowania wartości zagrożonej dla kursu walutowego USD/PLN są trafniejsze niż w wypadku indeksu WIG20. Szczególnie dobre rezultaty uzyskujemy, stosując oszacowania zmienności otrzymane za pomocą rodziny GARCH oraz modeli dwuliniowych. Prognozy zmienności dotyczące kursów walutowych charakteryzowały się wyższymi niż prognozy dla indeksów wartościami współczynnika R^2 i – prawdopodobnie w związku z tym – dla USD/PLN uzyskaliśmy lepsze oszacowania VaR niż dla WIG20.

Zauważmy na koniec, że choć nie byliśmy zbyt zadowoleni z niektórych prognoz zmienności, to jednak otrzymaliśmy akceptowalne oszacowania VaR. Możemy to potraktować jako dodatkowy argument potwierdzający sensowność bardziej powszechnego stosowania modeli zmienności i dalszego rozwijania ich teorii.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

9.8. Uwagi

Spośród licznych książek poświęconych ilościowemu zarządzaniu ryzykiem warto wymienić poradnik Joriona (2000). Godna polecenia jest dość zawansowana matematycznie książka McNeila, Freya i Embrechta (2005). Ogromną liczbę interesujących nowszych i starszych artykułów można znaleźć na przykład na stronach www.gloriamundi.org oraz www.riskmetrics.com.

Wyniki dotyczące szacowania VaR w kontekście polskiego rynku finansowego można znaleźć na przykład w pracach: Jajuga red. 2000, Piontek 2002, Papla 2007, Piontek i Papla 2005, Humeńczuk 2005, Fiszeder 2007, Pipień 2006.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

10

Regresja kwantylowa i modele CAViaR

Jak widzieliśmy w poprzednim rozdziale, szacowanie wartości zagrożonej można sprowadzić do wyznaczania odpowiedniego kwantyla warunkowego rozkładu stóp zwrotu z analizowanego instrumentu finansowego. Nie jest to jedyny powód, dla którego opis kwantyli rozkładów warunkowych może być interesujący. Dotychczas wyznaczaliśmy te kwantyle, wykorzystując oszacowania warunkowego odchylenia standardowego dla odpowiedniego rozkładu. Obecnie przedstawimy metodę bezpośredniego opisu kwantyli warunkowych za pomocą modeli, w których kwantyle są funkcjami zmiennych obserwowalnych. Metoda, o której mówimy, jest nazywana regresją kwantylową.

regresja kwantylowa

10.1. Kwantyle regresyjne

Obok omówionego wcześniej historycznego podejścia do bezpośredniego wyznaczania kwantyli rozkładu zwrotów instrumentu finansowego, istnieją bardziej wyrafinowane metody wyznaczania ewolucji tych kwantyli w czasie. Podstawowym narzędziem używanym przez te metody jest pojęcie kwantyla regresyjnego wprowadzone przez Koenkera i Basseta (1978).

W celu wytworzenia odpowiednich intuicji przypomnijmy powszechnie znany fakt, że przy danym zbiorze obserwacji r_t ($t = 1, \ldots, T$) średnia z próby $\bar{r}$ jest wartością b, dla której minimalną wartość przyjmuje suma $\sum_{t=1}^{T}(r_t - b)^2$, natomiast mediana $r_{(1/2)}$ minimalizuje wartość $\sum_{t=1}^{T}|r_t - b|$. Zależność dla mediany można uogólnić, podając sposób wyliczania dowolnego kwantyla.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

wyznaczanie kwantyli empirycznych

Idea kwantyla regresyjnego wywodzi się właśnie z faktu, że α-kwantyl empiryczny $\hat{r}_\alpha$, szeregu r_t ($t = 1, \ldots, T$) można otrzymać jako:

$$\hat{r}_\alpha = \arg\min_b \left\{ \frac{1}{T} \left(\sum_{t:r_t \geq b} \alpha |r_t - b| + \sum_{t:r_t < b} (1-\alpha)|r_t - b| \right) \right\} \tag{10.1}$$

Koenker i Basset uogólnili powyższy wynik na przypadek, w którym zmienne r_t mogą być opisane za pomocą modelu regresji liniowej:

$$r_t = \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta}_\alpha + u_{t,a} \tag{10.2}$$

dla wektora regresorów $\mathbf{x}_t = (x_{1,t}, \ldots, x_{k,t})'$, wektora parametrów $\boldsymbol{\beta}_\alpha = (\beta_{1,\alpha}, \ldots \beta_{k,\alpha})'$ oraz błędu $u_{t,\alpha}$, takiego, że $Q_\alpha(u_{t,\alpha} | \mathbf{x}_t) = 0$, gdzie $Q_\alpha(u_{t,\alpha} | \mathbf{x}_t)$ oznacza α-kwantyl rozkładu warunkowego zmiennej $u_{t,\alpha}$. W tej sytuacji α-kwantyl regresyjny zmiennej r_t, czyli $Q_\alpha(r_t | \mathbf{x}_t)$, jest równy $r_t = \mathbf{x}'_t \boldsymbol{\beta}_\alpha$, gdzie oszacowanie $\hat{\boldsymbol{\beta}}_\alpha$ parametru $\boldsymbol{\beta}_\alpha$ można otrzymać minimalizując względem $\boldsymbol{\beta}$ funkcję obiektową:

wyznaczanie kwantyli warunkowych

$$\left\{ \frac{1}{T} \left(\sum_{t:r_t \geq \mathbf{x}'_t\boldsymbol{\beta}} \alpha |r_t - \mathbf{x}'_t\boldsymbol{\beta}| + \sum_{t:r_t < \mathbf{x}'_t\boldsymbol{\beta}} (1-\alpha)|r_t - \mathbf{x}'_t\boldsymbol{\beta}| \right) \right\} \tag{10.3}$$

Gdy r_t jest szeregiem zwrotów instrumentu finansowego, za współrzędne wektora regresorów $\mathbf{x}_t$ przyjmuje się zwykle opóźnione wartości tych zwrotów r_t oraz inne przydatne zmienne objaśniające.

Przedstawiona wyżej metoda estymacji kwantyli regresyjnych została rozszerzona przez White'a (1992, 1994), obejmując modele postaci:

$$r_t = f(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\beta}_\alpha) + u_{t,\alpha} \tag{10.4}$$

w których $Q_\alpha(u_{t,\alpha} | \mathcal{F}_{t-1}) = 0$, a $\mathbf{x}_t$ jest wektorem mierzalnym względem σ-algebry $\mathcal{F}_{t-1}$ (intuicyjne: znamy jego rozkład przy danym zbiorze informacji $\mathcal{F}_{t-1}$). Przy tym f może nie być funkcją dwuliniową. Warunki dostateczne zgodności i asymptotycznej normalności estymatorów $\hat{\boldsymbol{\beta}}_\alpha$ wektora parametrów $\boldsymbol{\beta}_\alpha$ modelu (10.4), uzyskanych jako:

$$\arg\min_{\boldsymbol{\beta}} \left\{ \frac{1}{T} \left(\sum_{t:r_t \geq f(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\beta}_\alpha)} \alpha |r_t - f(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\beta}_\alpha)| + \sum_{t:r_t < f(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\beta}_\alpha)} (1-\alpha)|r_t - f(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\beta}_\alpha)| \right) \right\} \tag{10.5}$$

przedstawione zostały przez Engle'a i Manganellego (2004).

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

10.2. Modele CAViaR

Interesującą klasą modeli, opisujących zmieniający się w czasie kwantyl zwrotu instrumentu finansowego jako nieliniowy proces autoregresyjny, jest rodzina warunkowych autoregresyjnych modeli VaR (CAViaR, *Conditional Autoregressive Value at Risk*), wprowadzona przez Engle'a i Manganellego (1999). U podstaw modeli CAViaR leży obserwacja, że rozkłady kwadratów zwrotów giełdowych charakteryzują się autokorelacją, czego widocznym objawem są na przykład skupiska zmienności. W konsekwencji VaR, który jest silnie związany z odchyleniem standardowym rozkładu zwrotów, powinien wykazywać podobne zachowania. Naturalnym sposobem sformalizowania tej własności jest zastosowanie specyfikacji typu autoregresyjnego. Najbardziej ogólna specyfikacja dla modelu CAViaR na poziomie istotności α ma postać:

specyfikacja modelu CAViaR

$$\mathrm{VaR}_t(\alpha) = f(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\beta}_\alpha) = \beta_0 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \,\mathrm{VaR}_{t-i}(\alpha) + l(\beta_{p+1}, \ldots, \beta_{p+q} \mid \mathcal{F}_{t-1}) \quad (10.6)$$

gdzie $\mathcal{F}_{t-1}$ oznacza zbiór (σ-ciało) informacji dostępnych w chwili t–1, a:

$$\boldsymbol{\beta}_\alpha = (\beta_0, \ldots, \beta_{p+q})'$$

W zastosowaniach praktycznych przedstawiony wyżej ogólny model redukuje się zwykle do modelu rzędu pierwszego:

$$\mathrm{VaR}_t(\alpha) = \beta_0 + \beta_1 \,\mathrm{VaR}_{t-1}(\alpha) + l\left(\beta_2, r_{t-1}, \mathrm{VaR}_{t-1}(\alpha)\right) \quad (10.7)$$

Składnik autoregresyjny $\beta_1 \mathrm{VaR}_{t-1}(\alpha)$ zapewnia łagodniejszą ewolucję VaR w czasie. Składnik $l(\beta_2, r_{t-1}, \mathrm{VaR}_{t-1}(\alpha))$ wiąże natomiast poziom VaR w momencie t z poziomem zwrotu w momencie t–1. Mierzy on zatem, jak bardzo powinien się zmienić VaR pod wpływem nowych informacji o zwrocie.

Jest wiele możliwych konkretnych specyfikacji modeli CAViaR. Poniżej przedstawiamy niektóre z nich.

10.2.1. Model adaptacyjny

Model adaptacyjny (*adaptive* – AD) jest określony, odpowiednio dla pozycji długiej i krótkiej, równaniami:

model AD

$$\mathrm{VaR}_t^l(\alpha) = \mathrm{VaR}_{t-1}^l(\alpha) + \beta\left[\left(I(r_{t-1} \le -\mathrm{VaR}_{t-1}^l(\alpha)) - \alpha \right] \right. \quad (10.8)$$

oraz

$$\mathrm{VaR}_t^s(\alpha) = \mathrm{VaR}_{t-1}^s(\alpha) + \beta\left[I(r_{t-1} \ge \mathrm{VaR}_{t-1}^s(\alpha)) - \alpha \right] \quad (10.9)$$

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Strategia odpowiadająca temu prostemu modelowi polega na tym, że w razie przekroczenia wyznaczonej wielkości VaR, należy zwiększyć tę wartość, a w razie nieprzekroczenia, powinniśmy nieznacznie ją zmniejszyć.

Zauważmy, że model AD nie uwzględnia wielkości zwrotów, a tylko sam fakt zaistnienia bądź niezaistnienia przekroczenia. W szczególności nie jest efektywnie wykorzystana informacja o pojawieniu się zwrotu ekstremalnego. Poza tym poziom korekty ustalany jest dość arbitralnie.

10.2.2. Symetryczny model z bezwzględną wartością

model SAV

Kolejny rozważany przez nas model, tzw. symetryczny model z wartością bezwzględną (*Symmetric Absolute Value* – SAV), jest bardziej złożony. Zawiera on trzy parametry i opisuje się go, odpowiednio dla pozycji długiej i krótkiej, równaniami:

$$\mathrm{VaR}_t^l(\alpha) = \beta_0 + \beta_1 \mathrm{VaR}_{t-1}^l(\alpha) + \beta_2 |r_{t-1}| \tag{10.10}$$

oraz

$$\mathrm{VaR}_t^s(\alpha) = \beta_0 + \beta_1 \mathrm{VaR}_{t-1}^s(\alpha) + \beta_2 |r_{t-1}| \tag{10.11}$$

W modelu tym wykorzystywana jest pełna informacja o bezwzględnej wartości zwrotu.

10.2.3. Model asymetryczny z wartością bezwzględną

model ASM

Trzeci z przedstawianych modeli, model asymetryczny z wartością bezwzględną (*Asymmetric Absolute Value* – ASM), dany jest, odpowiednio dla pozycji długiej i krótkiej, równaniami:

$$\mathrm{VaR}_t^l(\alpha) = \beta_0 + \beta_1 \mathrm{VaR}_{t-1}^l(\alpha) + \beta_2 |r_{t-1} - \beta_3| \tag{10.12}$$

oraz

$$\mathrm{VaR}_t^s(\alpha) = \beta_0 + \beta_1 \mathrm{VaR}_{t-1}^s(\alpha) + \beta_2 |r_{t-1} - \beta_3| \tag{10.13}$$

Wykorzystuje on informację na temat bezwzględnych odchyleń zwrotów od pewnego poziomu, którego wielkość podlega estymacji.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

10.2.4. Pośredni model GARCH

Spośród innych modeli CAViaR warto wspomnieć o pośrednim modelu GARCH (INDIRECT GARCH). W najprostszym przypadku model INDIRECT GARCH(1,1) ma znajomą specyfikację wyrażającą się zarówno w wypadku pozycji długiej, jak i krótkiej równaniem:

$$\mathrm{VaR}_t(\alpha) = \sqrt{\beta_1 + \beta_2 (\mathrm{VaR}_{t-1}(\alpha))^2 + \beta_3 r_{t-1}^2} \tag{10.14}$$

Specyfikacja modelu INDIRECT GARCH jest poprawna, jeśli szereg zwrotów jest rzeczywiście generowany przez model GARCH(1,1). Jednak w tym wypadku bardziej efektywna jest bezpośrednia estymacja modelu GARCH za pomocą metody największej wiarygodności i wyznaczanie VaR w oparciu o rozkład reszt standaryzowanych w sposób przedstawiony w rozdziale 9.

10.3. Estymacja modeli CAViaR

nieróżniczkowalność funkcji obiektowej

Głównym problemem przy estymacji nieliniowych kwantyli regresyjnych jest to, że funkcja obiektowa w zagadnieniu minimalizacji (10.5) nie jest różniczkowalna. Nie można więc stosować tradycyjnych algorytmów opartych na technikach związanych z różniczkowalnością. Możliwe są różne rozwiązania tego problemu. Podejście przedstawione w pierwszej wersji pracy Engle'a i Manganellego (1999), wykorzystywało estymację parametrów modeli CAViaR przy użyciu algorytmu genetycznego, za pomocą którego teoretycznie można wyznaczyć optimum lokalne, nawet dla bardzo skomplikowanych funkcji obiektowych. W opublikowanej wersji tej pracy (Engle i Manganelli 2004), autorzy przedstawiają inną metodę estymacji, której idea opiera się na aproksymacji nieróżniczkowalnej funkcji obiektowej za pomocą odpowiednio dobranej funkcji gładkiej, tak że staje się możliwe wykorzystanie rozwinięcia Taylora. Optymalizacja przeprowadzana jest za pomocą algorytmu sympleks Neldera–Meada i metody quasi-newtonowskiej. Błędy standardowe wyznacza się przy użyciu estymatorów opartych na algorytmie *k* najbliższych sąsiadów.

Engle i Manganelli w ostatecznej wersji swojej pracy (Engle i Manganelli 2004) nie stosują już algorytmu genetycznego, jednak metody optymalizacji wykorzystujące algorytmy genetyczne są obecnie przedmiotem ciągle rosnącego zainteresowania badaczy pracujących w bardzo różnych dziedzinach. Używana w nich technika randomizacji pozwala obejść trudności związane z wielowymiarowością, skutkujące rosnącą nieefektywnością metod opartych

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

na aparacie tradycyjnym. Idea związana z optymalizacją za pomocą algorytmu genetycznego wywodzi się z praw rządzących procesem doboru naturalnego i pewnych zasad genetyki.

algorytm genetyczny

Punktem wyjściowym algorytmu genetycznego jest pewna populacja początkowych prób wektora parametrów, który ma być optymalizowany. Algorytm interpretuje wartość funkcji obiektowej na każdej z tych prób jako miarę jej dopasowania do optimum. Tworzenie nowej populacji z wyjściowych wartości próbnych przebiega w trzech krokach:

1. Reprodukcja oparta na dopasowaniu. W ramach tego kroku wybiera się członków populacji do reprodukcji na podstawie dopasowania określonego zgodnie z pewnym ustalonym kryterium. Stosuje się przy tym zasadę przetrwania najlepiej dopasowanych. Zatem najlepiej dopasowanym członkom starej populacji przypisuje się większe prawdopodobieństwo przetrwania i reprodukcji.
2. Krzyżowanie będące procesem kojarzenia i ustalania reguł reprodukcji. W tym kroku buduje się nową kombinację parametrów na podstawie składowych istniejących wektorów. Jest wiele różnych metod krzyżowania, a każda z nich polega na tworzeniu kombinacji wartości parametrów pochodzących od dwojga lub większej liczby rodziców w pewien specyficzny dla danej metody sposób.
3. Mutacja. Pewnym genom przypisuje się możliwość losowych zmian, co stwarza warunki do poprawy cech populacji, w sensie zwiększenia dopasowania członków tej populacji. Mutacja jest kluczowym sposobem zapewnienia różnorodności w populacji, mimo że zbyt daleko posunięta mutacja może być szkodliwa.

zalety algorytmu genetycznego

Wymienione tu trzy cechy sprawiają, że algorytmy genetyczne różnią się radykalnie od tradycyjnych metod szukania optimum. Pozwalają one algorytmowi rozwijać pokolenia, które badają interesujący nas obszar w taki sposób, że mogą uniknąć zablokowania się w jakimś optimum lokalnym. Jest to użyteczne, zwłaszcza przy trudnych problemach optymalizacyjnych, szczególnie takich, w których występują liczne lokalne minima i maksima. Podczas gdy tradycyjne procedury minimalizujące często zadowalają się wyszukaniem jedynie lokalnego optimum, algorytmy genetyczne, ogólnie rzecz biorąc, są w stanie wyznaczyć optimum globalne (Goldberg 1989).

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

10.4. Od teorii do praktyki

Podobnie jak w poprzednim rozdziale, wyliczenia wielkości VaR zostały wykonane dla indeksu WIG20 i dla kursu walutowego USD/PLN (pozycja długa i krótka). Porównamy mechanizm działania trzech typów modeli CAViaR omówionych w podrozdziale 10.2. W każdym wypadku dopasowujemy je do długich i krótkich szeregów zwrotów. Uzyskane oszacowania VaR oceniamy za pomocą udziału przekroczeń, testu Kupca oraz miar ESF1 i ESF2. Wszystkie oszacowania VaR zestawione są ze zwrotami na odpowiednich wykresach, co pozwoli nam na pobieżną, ale syntetyczną ocenę jakości wyliczeń. Dodatkowo wykresy pokazują różnice w działaniu poszczególnych modeli CAViaR oraz zmieniający się wraz ze zwiększaniem skomplikowania modelu charakter dynamiki kwantyli warunkowych wyznaczających szeregi warunkowej wartości zagrożonej.

Ze względu na to, że uważamy metodę szacowania parametrów modeli przy użyciu algorytmów genetycznych za interesującą alternatywę dla klasycznych narzędzi optymalizacyjnych, prezentujemy czytelnikowi wyniki uzyskane właśnie za pomocą tej metody. Algorytm genetyczny używany w prezentowanych tutaj przykładowych obliczeniach nosi nazwę *Differential Evolution* (DE), a jego autorami są K. Price i R. Storn (1997). Obliczenia zostały wykonane w Matlabie.

Oszacowania parametrów modeli CAViaR-AD wyestymowanych dla indeksu WIG20 na podstawie długiego i krótkiego szeregu zwrotów (ilustracja 10.1) przedstawiono w tabeli 10.1, a oceny jakości wyliczeń VaR, w tabelach 10.2 i 10.3.

Tabela 10.1. Oszacowania parametrów modeli CAViaR-AD dopasowanych do szeregów WIG20*d* i WIG20*k*

Szereg	Model	Poziom istotności	Pozycja	β
WIG20*d*	AD	0,05	krótka	0,7336
		0,025	krótka	1,6326
		0,01	krótka	1,5567
WIG20*d*	AD	0,05	długa	1,1007
		0,025	długa	1,8054
		0,01	długa	2,1781
WIG20*k*	AD	0,05	krótka	– 0,1350
		0,025	krótka	– 0,1664
		0,01	krótka	– 0,4346
WIG20*k*	AD	0,05	długa	– 0,0615
		0,025	długa	– 0,1276
		0,01	długa	– 0,6135

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Tabela 10.2. WIG20. Ocena jakości oszacowań VaR uzyskanych za pomocą modelu CAViaR-AD na podstawie długiego szeregu zwrotów

	Model i liczba obserwacji	Pozycja	α	Liczba przekroczeń	Udział przekroczeń	Statystyka Kupca	*p*-wartość	ESF1	ESF2
W próbie	AD 1996	krótka	0,05	117	0,0586	2,9638	0,0851	4,1154	1,4384
		krótka	0,025	50	0,0251	0,0002	0,9886	4,7942	1,3849
		krótka	0,01	19	0,0095	0,0474	0,8277	5,7734	1,2767
	AD 1996	długa	0,05	100	0,0501	0,0004	0,9836	–3,9757	1,4553
		długa	0,025	51	0,0256	0,0247	0,8751	–4,7900	1,3044
		długa	0,01	20	0,0100	0,00008	0,9928	–6,0929	1,2045
Prognoza	AD 104	krótka	0,05	5	0,0481	0,0082	0,9279	2,9130	1,5397
		krótka	0,025	3	0,0288	0,0602	0,8062	3,3028	1,2298
		krótka	0,01	4	0,0385	4,9425	0,0262	3,1424	1,2512
	AD 104	długa	0,05	4	0,0385	0,3156	0,5743	1,9775	1,1378
		długa	0,025	1	0,0096	1,3141	0,2517	1,6741	1,0680
		długa	0,01	1	0,0096	0,0016	0,9684	1,5285	1,0246

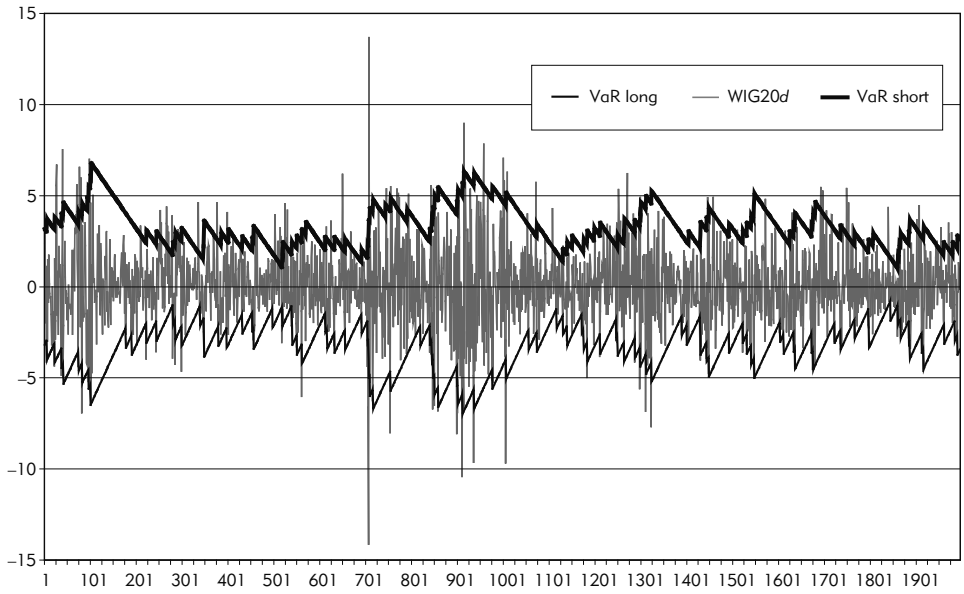
Tabela 10.3. WIG20. Ocena jakości oszacowań VaR uzyskanych za pomocą modelu CAViaR-AD na podstawie krótkiego szeregu zwrotów

	Model i liczba obserwacji	Pozycja	α	Liczba przekroczeń	Udział przekroczeń	Statystyka Kupca	*p*-wartość	ESF1	ESF2
W próbie	AD 528	krótka	0,05	31	0,0587	0,8010	0,3708	3,6900	1,3074
		krótka	0,025	15	0,0284	0,2413	0,6233	4,3471	1,1802
		krótka	0,01	4	0,0076	0,3421	0,5586	5,2026	1,0501
	AD 528	długa	0,05	34	0,0644	2,1195	0,1454	3,2062	1,2919
		długa	0,025	18	0,0341	1,6105	0,2044	3,6298	1,2492
		długa	0,01	6	0,0114	0,0950	0,7579	4,3780	1,1070
Prognoza	AD 104	krótka	0,05	5	0,0481	0,0082	0,9279	3,0177	1,1924
		krótka	0,025	2	0,0192	0,1541	0,6947	3,4815	1,0379
		krótka	0,01	0	0,0000	2,0905	0,1482	–	–
	AD 104	długa	0,05	1	0,0096	5,2787	0,0216	–2,8040	1,2147
		długa	0,025	1	0,0096	1,3141	0,2517	–2,8040	1,0228
		długa	0,01	0	0,0000	2,0905	0,1482	–	–

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Zarówno w próbie, jak i w okresie prognozy jakość oszacowań VaR jest dość dobra, przy czym lepsze rezultaty uzyskaliśmy, posługując się długim szeregiem zwrotów. W wypadku krótkiego szeregu zwrotów, prognozy VaR są przeszacowane, zwłaszcza dla poziomu istotności 0,05. Wykresy oszacowań VaR na ilustracjach 10.1 i 10.2 pokazują specyficzny przedziałami liniowy charakter oszacowań uzyskanych za pomocą modelu adaptacyjnego.

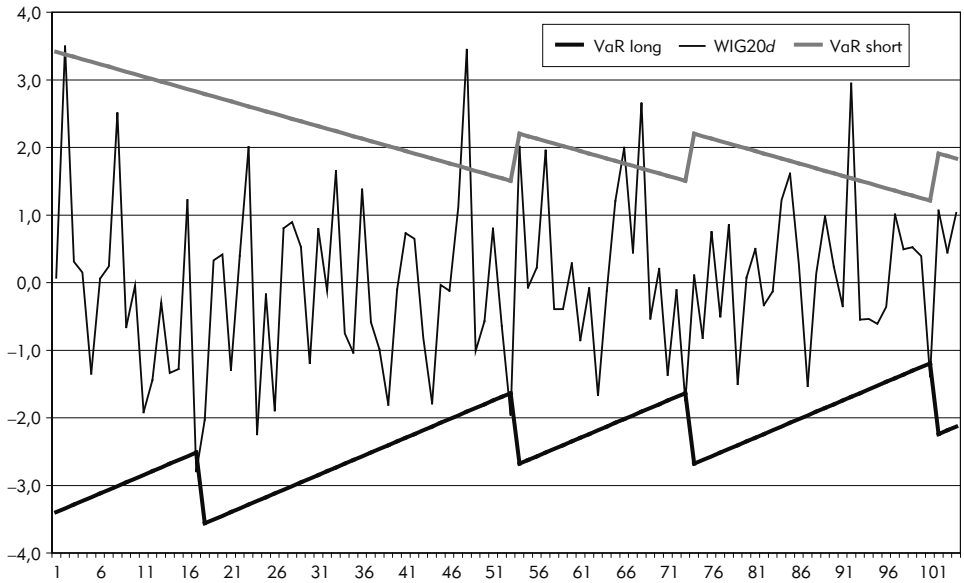
Ilustracja 10.1. WIG20. VaR w próbie wyliczony za pomocą modelu CAViaR-AD dla długiego szeregu zwrotów



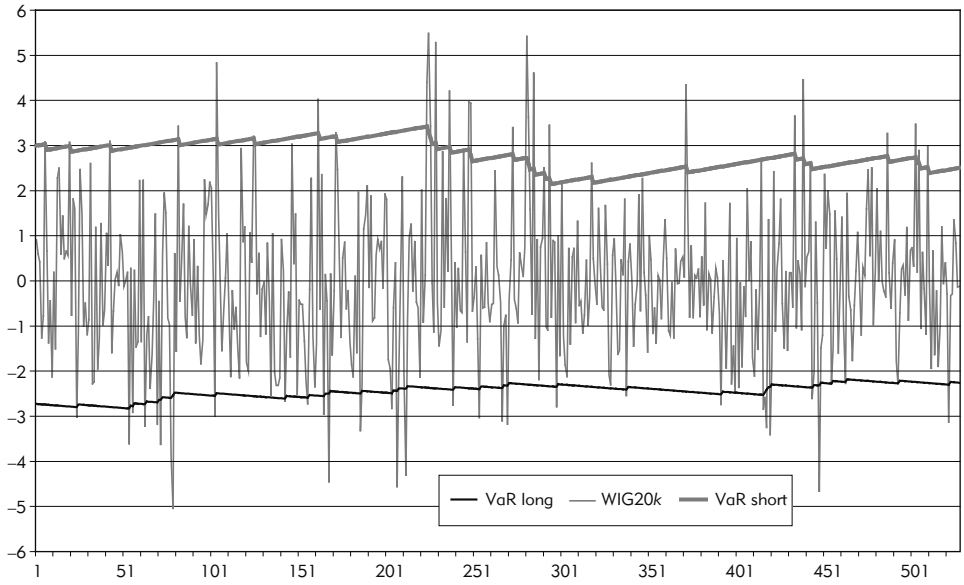
Krótki szereg zwrotów indeksu WIG20 obejmuje okres po 17.11.2003, w którym występował bardzo wyraźnie efekt systematycznego obniżania się zmienności i spowalniania dynamiki rynku. Uzyskane na podstawie tych danych oszacowania VaR są zawyżone i, zwłaszcza w wypadku długiej pozycji, prawie stałe (ilustracje 10.3 i 10.4). Prawdę mówiąc, jest to przykład bardzo źle działającego modelu. Na ilustracji 10.4 wyraźnie widać, że zmienność maleje, a oszacowania VaR rosną. Wynika to z ujemnych oszacowań parametru β, które nie powinny występować. Tutaj algorytm genetyczny zawiódł.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 10.2. WIG20. Prognoza VaR uzyskana za pomocą modelu CAViaR-AD dla długiego szeregu zwrotów

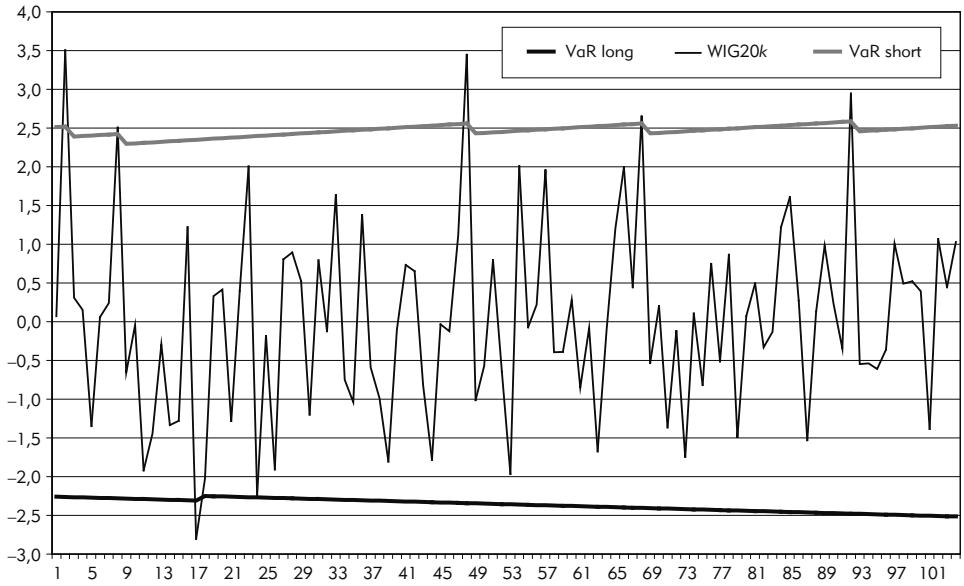


Ilustracja 10.3. WIG20. VaR w próbie wyliczony za pomocą modelu AD dla krótkiego szeregu zwrotów



Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 10.4. WIG20. Prognoza VaR wyliczona za pomocą modelu CAViaR-AD dopasowanego do krótkiego szeregu zwrotów



Kolejnym zastosowanym przez nas modelem z grupy CAViaR jest model symetryczny z wartością bezwzględną (SAV). Jest on bardziej rozbudowany niż model adaptacyjny i uwzględnia informacje o wielkości zwrotu. Oszacowania parametrów modeli dopasowanych do szeregów zwrotów indeksu WIG20 zostały przedstawione w tabeli 10.4.

W wypadku długiego szeregu zwrotów WIG20*d* oszacowania VaR są bardzo dobre w całym okresie próby zarówno dla pozycji krótkiej, jak i długiej. Dla prognoz dobre są oszacowania dotyczące pozycji krótkiej (tabela 10.5), natomiast wyraźnie przeszacowane są prognozy odnoszące się do pozycji długiej. Jest to widoczne również na wykresach (ilustracje 10.5 i 10.6).

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Tabela 10.4. Oszacowania parametrów modeli CAViaR-SAV dopasowanych do szeregów WIG20*d* i WIG20*k*

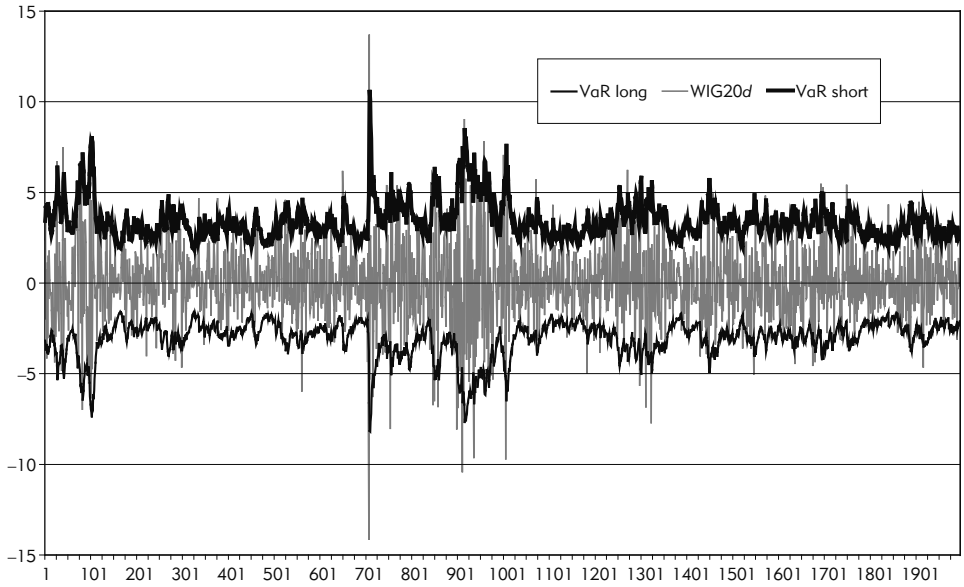
Szereg	Model	Poziom istotności	Pozycja	β_0	β_1	β
WIG20d	SAV	0,05	krótka	0,3248	0,7759	0,2886
		0,025	krótka	0,5962	0,6814	0,4616
		0,01	krótka	1,3338	0,5577	0,5545
WIG20d	SAV	0,05	długa	0,1232	0,8604	0,1974
		0,025	długa	0,1500	0,8855	0,1889
		0,01	długa	0,1751	0,8348	0,4279
WIG20*k*	SAV	0,05	krótka	3,7768	–0,3479	0,1589
		0,025	krótka	5,0220	–0,4519	0,3117
		0,01	krótka	6,5362	–0,4809	0,2415
WIG20*k*	SAV	0,05	długa	0,4754	0,7745	0,1004
		0,025	długa	0,2793	0,8882	0,0599
		0,01	długa	6,7720	–0,7146	0,2697

Tabela 10.5. WIG20. Ocena jakości oszacowań VaR uzyskanych za pomocą modelu CAViaR-SAV na podstawie długiego szeregu zwrotów

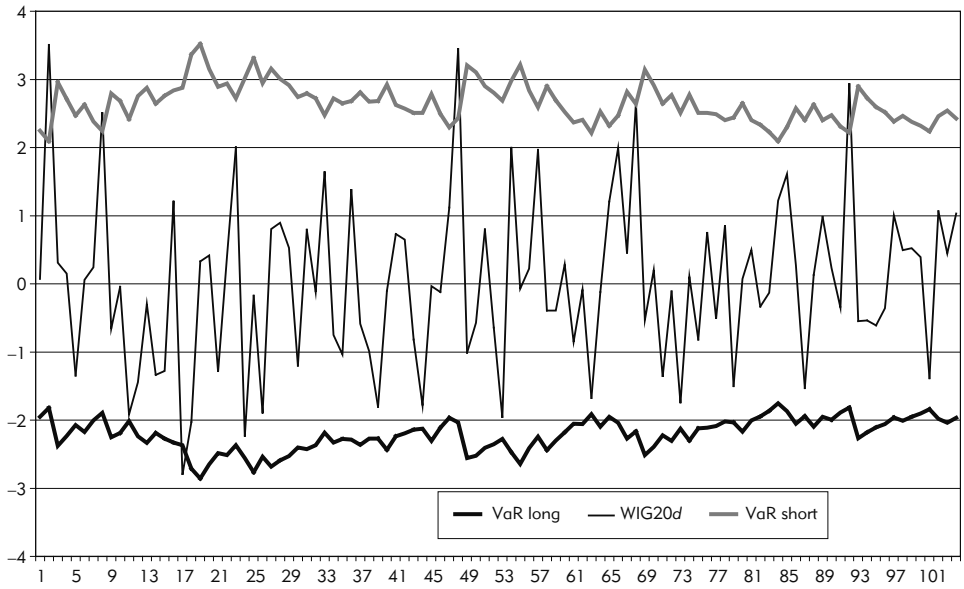
	Model i liczba obserwacji	Pozycja	α	Liczba przekroczeń	Udział przekroczeń	Statystyka Kupca	*p*-wartość	ESF1	ESF2
W próbie	SAV 1996	krótka	0,05	100	0,0501	0,0004	0,9836	4,3683	1,2783
		krótka	0,025	51	0,0256	0,0247	0,8751	5,0073	1,2331
		krótka	0,01	20	0,0100	0,0000	0,9928	5,8698	1,1621
	SAV 1996	długa	0,05	101	0,0506	0,0151	0,9021	4,2927	1,4017
		długa	0,025	50	0,0251	0,0002	0,9886	5,1998	1,3295
		długa	0,01	20	0,0100	0,0000	0,9928	6,4296	1,2854
Prognoza	SAV 104	krótka	0,05	5	0,0481	0,0082	0,9279	3,0177	1,3118
		krótka	0,025	3	0,0288	0,0602	0,8062	3,3028	1,2501
		krótka	0,01	1	0,0096	0,0016	0,9684	3,5060	1,0560
	SAV 104	długa	0,05	1	0,0096	5,2787	0,0216	–2,8040	1,1843
		długa	0,025	0	0,0000	5,2661	0,0217	–	–
		długa	0,01	0	0,0000	2,0905	0,1482	–	–

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 10.5. WIG20*d*. VaR w próbie wyliczony za pomocą modelu CAViaR-SAV dla długiego szeregu zwrotów



Ilustracja 10.6. WIG20*d*. Prognoza VaR wyliczona za pomocą modelu CAViaR-SAV dopasowanego do długiego szeregu zwrotów



Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Prognozy VaR otrzymane z modelu CAViaR-SAV dla krótkiego szeregu zwrotów są nietrafne, choć oszacowania w próbie nadal są dobrej jakości (tabela 10.6). Wykorzystanie bardziej skomplikowanego modelu zwiększyło liczbę załamań na krzywej obrazującej prognozy VaR, ale nie poprawiło jakości tych prognoz (ilustracje 10.7 i 10.8).

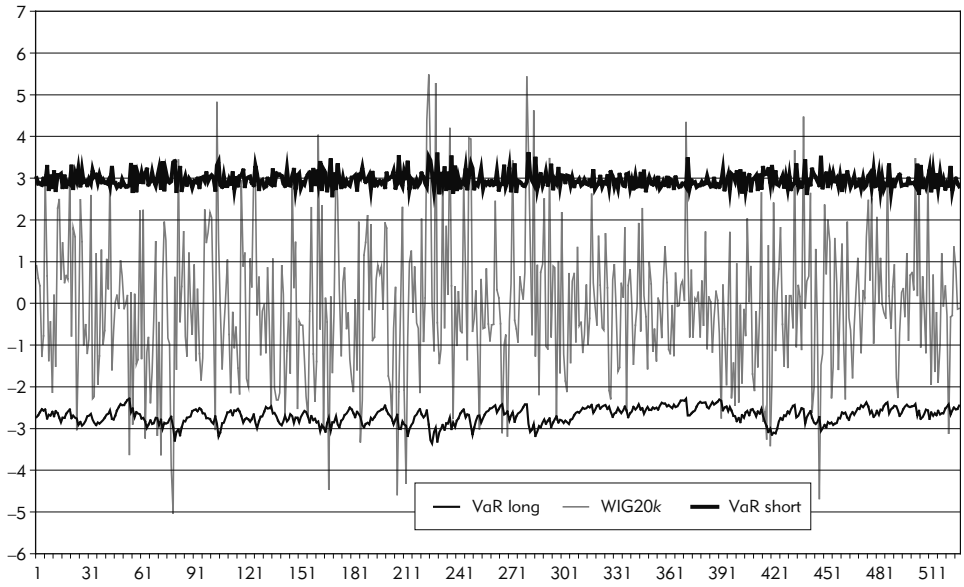
Tabela 10.6. WIG20. Ocena jakości oszacowań VaR uzyskanych za pomocą modelu CAViaR-SAV na podstawie krótkiego szeregu zwrotów

	Model i liczba obserwacji	**Pozycja**	α	**Liczba przekroczeń**	**Udział przekroczeń**	**Statystyka Kupca**	***p*-wartość**	**ESF1**	**ESF2**
W próbie	SAV 528	krótka	0,05	27	0,0511	0,0143	0,9050	3,8640	1,3004
		krótka	0,025	14	0,02652	0,0488	0,8252	4,3933	1,1815
		krótka	0,01	4	0,0076	0,3421	0,5586	4,9315	1,0797
	SAV 528	długa	0,05	26	0,04924	0,0064	0,9362	3,4053	1,2667
		długa	0,025	13	0,0246	0,0031	0,9554	3,8769	1,2033
		długa	0,01	6	0,0114	0,0950	0,7579	4,4958	1,0621
Prognoza	SAV 104	krótka	0,05	3	0,0288	1,1484	0,2839	3,3028	1,1479
		krótka	0,025	1	0,0096	1,3141	0,2517	3,5060	1,0125
		krótka	0,01	0	0,0000	2,0905	0,1482	–	–
	SAV 104	długa	0,05	1	0,0096	5,2787	0,0216	2,8040	1,0775
		długa	0,025	0	0,0000	5,2661	0,0217	–	–
		długa	0,01	0	0,0000	2,0905	0,1482	–	–

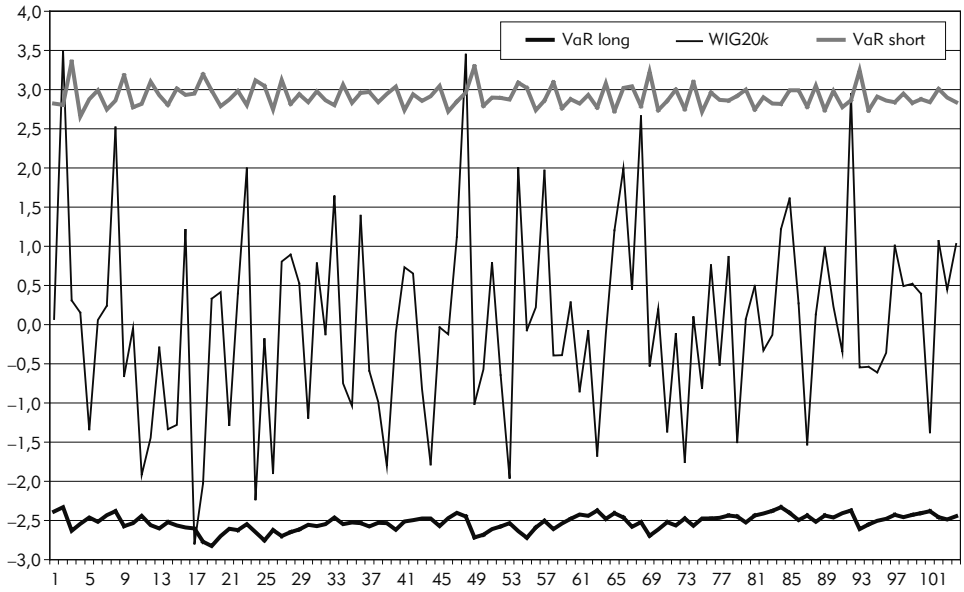
Zastosowanie modeli asymetrycznych z wartością bezwzględną CAViaR-ASM nie wpłynęło znacząco na poprawę oszacowań VaR (tabela 10.7). Ocenę ich jakości przedstawiono w tabeli 10.8. Wyniki testów dla prognoz w przypadku krótkich szeregów są identyczne jak dla modelu CAViaR-SAV. W pozostałych przypadkach udziały przekroczeń są prawie niezmienione w porównaniu z wyliczeniami dla modelu SAV. Na ilustracjach 10.9 i 10.10 przedstawiających zestawienie VaR i zwrotów, odpowiednio w okresie próby i w okresie prognozy, wyraźnie widoczne jest to w wypadku długiego szeregu zwrotów.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 10.7. WIG20. VaR w próbie wyliczony za pomocą modelu CAViaR-SAV dla krótkiego szeregu zwrotów

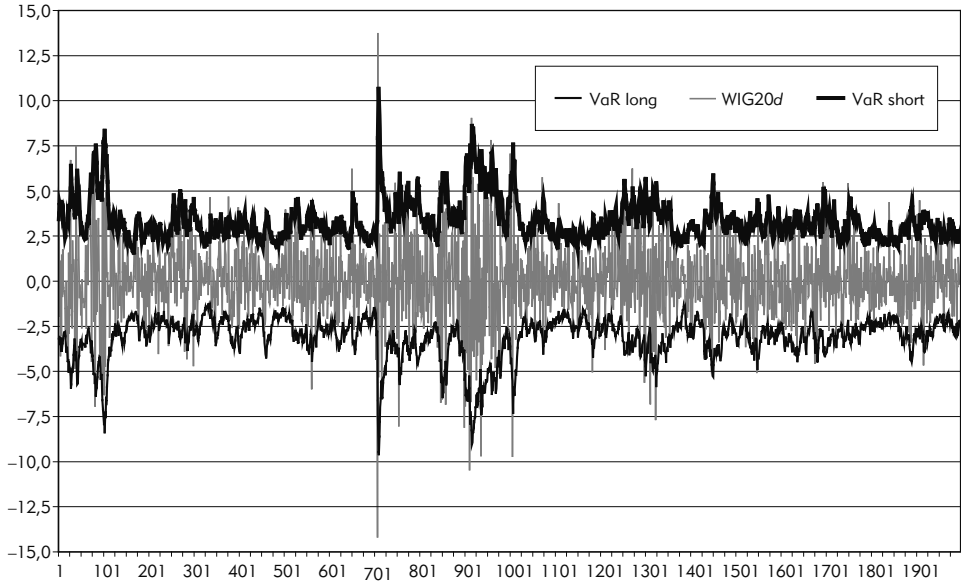


Ilustracja 10.8. WIG20. Prognoza VaR wyliczona za pomocą modelu CAViaR-SAV dopasowanego do krótkiego szeregu zwrotów

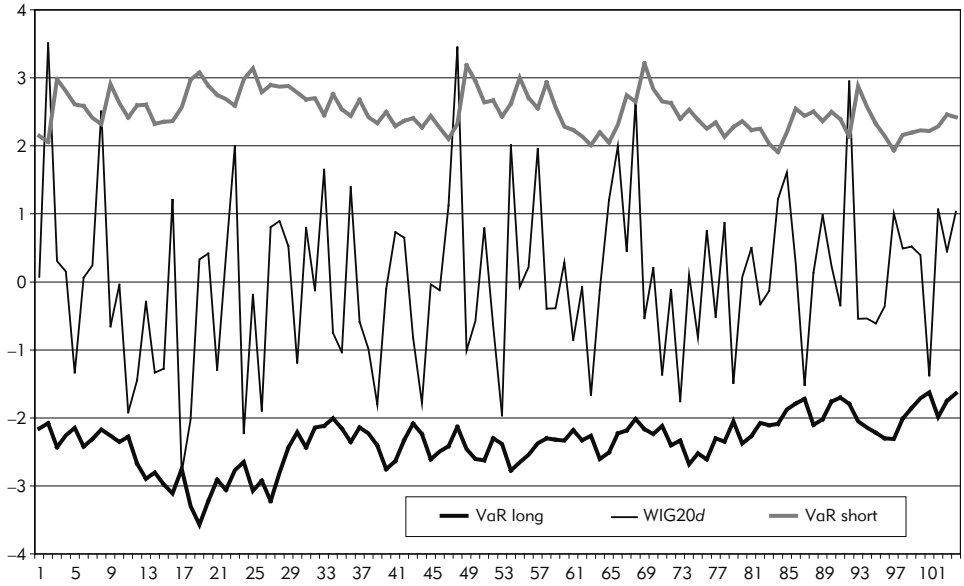


Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 10.9. WIG20. VaR w próbie wyliczony za pomocą modelu CAViaR-ASM dla długiego szeregu zwrotów



Ilustracja 10.10. WIG20. Prognoza VaR wyliczona za pomocą modelu CAViaR-ASM dopasowanego do długiego szeregu zwrotów



Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Tabela 10.7. Parametry modeli CAViaR-ASM dopasowanych do szeregów WIG20*d* i WIG20*k*

Szereg	Model	Poziom istotności	Pozycja	β_0	β_1	β_2	β_3
WIG20*d*	ASM	0,05	krótka	0,2059	0,8044	0,2891	– 0,3699
		0,025	krótka	0,6412	0,6602	0,4925	– 0,3242
		0,01	krótka	1,1774	0,5861	0,5747	– 0,5170
WIG20*d*	ASM	0,05	długa	0,0250	0,8536	0,2461	0,9461
		0,025	długa	– 0,0142	0,8634	0,3112	0,8380
		0,01	długa	0,5177	0,5304	1,0732	1,2246
WIG203	ASM	0,05	krótka	3,3182	– 0,3336	0,2972	1,3156
		0,025	krótka	3,7069	– 0,3186	0,4910	1,5585
		0,01	krótka	6,7677	– 0,7416	0,3587	1,2737
WIG203	ASM	0,05	długa	5,3607	– 0,9729	– 0,0375	0,8930
		0,025	długa	6,2413	– 1,0039	0,0067	– 7,4002
		0,01	długa	– 0,9543	0,6051	0,2770	8,8690

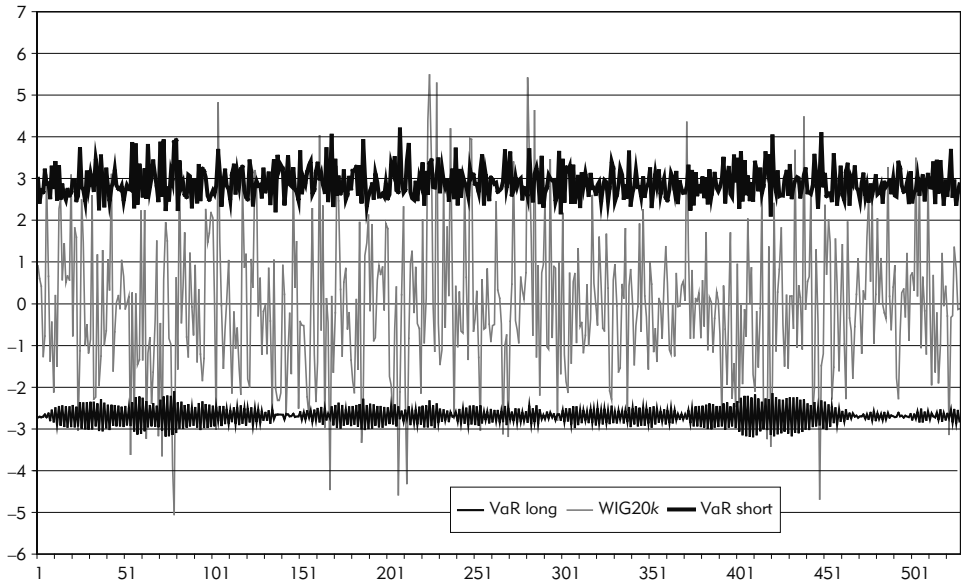
Tabela 10.8. WIG20. Ocena jakości oszacowań VaR uzyskanych za pomocą modelu CAViaR-ASM na podstawie długiego szeregu zwrotów

	Model i liczba obserwacji	Pozycja	α	Liczba przekroczeń	Udział przekroczeń	Statystyka Kupca	*p*-wartość	ESF1	ESF2
W próbie	ASM 1996	krótka	0,05	100	0,0501	0,0004	0,9836	4,3242	1,3043
		krótka	0,025	51	0,0256	0,0247	0,8751	4,8840	1,2015
		krótka	0,01	19	0,0095	0,0474	0,8277	5,3101	1,1137
	ASM 1996	długa	0,05	96	0,0481	0,1542	0,6946	4,2456	1,3634
		długa	0,025	51	0,0256	0,0247	0,8751	5,0345	1,3290
		długa	0,01	19	0,0095	0,0474	0,8277	6,2852	1,1963
Prognoza	ASM 104	krótka	0,05	5	0,0481	0,0082	0,9279	3,0177	1,3314
		krótka	0,025	3	0,0288	0,0602	0,8062	3,3028	1,1747
		krótka	0,01	1	0,0096	0,0016	0,9684	3,5060	1,1173
	ASM 104	długa	0,05	1	0,0096	5,2787	0,0216	2,8040	1,0194
		długa	0,025	0	0,0000	5,2661	0,0217	–	–
		długa	0,01	0	0,0000	2,0905	0,1482	–	–

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Na ilustracji 10.11 przedstawiającej zestawienie oszacowań VaR w próbie otrzymanych na podstawie modelu CAViaR-ASM dla krótkiego szeregu zwrotów zwraca uwagę charakterystyczny oscylujący wykres VaR dla pozycji długiej. Prognozę VaR wyliczoną za pomocą tego modelu przedstawiono na ilustracji 10.12. Model ASM jest najbardziej złożonym spośród prezentowanych tu modeli CAViaR, stąd też w oszacowaniach VaR pojawia się większa dynamika. Jednak, jak już wspomnieliśmy, nie wpływa to znacząco na poprawę jakości oszacowań VaR, które – zwłaszcza w wypadku długiej pozycji – są zbyt konserwatywne (tabela 10.9).

Ilustracja 10.11. WIG20. VaR w próbie wyliczony za pomocą modelu CAViaR-ASM dla krótkiego szeregu zwrotów

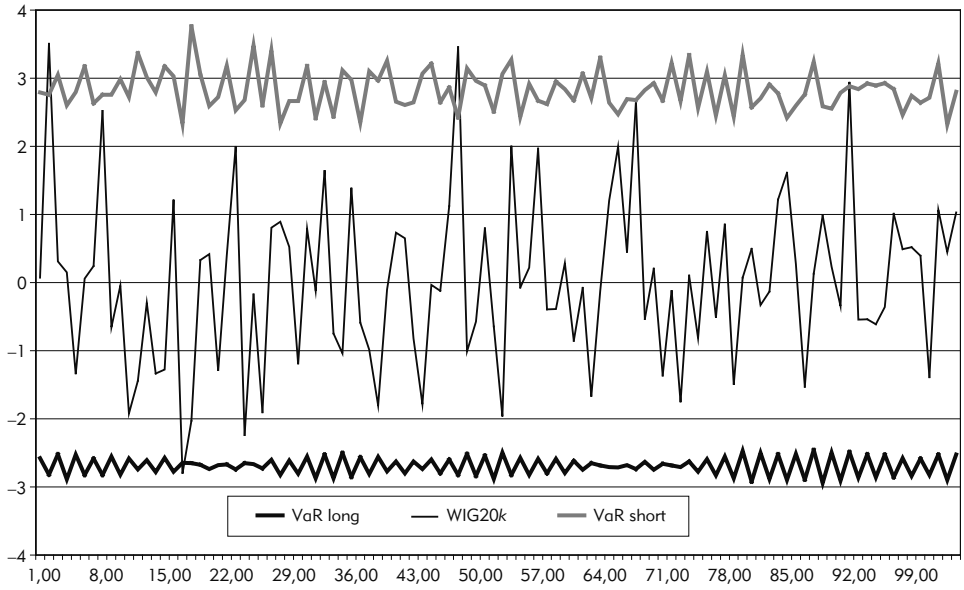


Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Tabela 10.9. WIG20. Ocena jakości oszacowań VaR uzyskanych za pomocą modelu CAViaR-ASM na podstawie krótkiego szeregu zwrotów

	Model i liczba obserwacji	Pozycja	α	Liczba przekroczeń	Udział przekroczeń	Statystyka Kupca	*p*-wartość	ESF1	ESF2
W próbie	ASM 528	krótka	0,05	25	0,0473	0,0795	0,7780	3,8578	1,3280
		krótka	0,025	13	0,0246	0,0031	0,9554	4,3380	1,2279
		krótka	0,01	6	0,0113	0,0950	0,7579	4,9260	1,1448
	ASM 528	długa	0,05	26	0,0492	0,0064	0,9362	3,3775	1,2655
		długa	0,025	13	0,0246	0,0031	0,9554	3,8669	1,2208
		długa	0,01	6	0,0114	0,0950	0,7579	4,3549	1,0751
Prognoza	ASM 104	krótka	0,05	3	0,0288	1,1484	0,2839	3,3028	1,2406
		krótka	0,025	0	0,0000	5,2661	0,0217	–	–
		krótka	0,01	0	0,0000	2,0905	0,1482	–	–
	ASM 104	długa	0,05	1	0,0096	5,2787	0,0216	2,8040	1,0599
		długa	0,025	1	0,0096	1,3141	0,2517	2,8040	1,2990
		długa	0,01	0	0,0000	2,0905	0,1482	–	–

Ilustracja 10.12. WIG20. Prognoza VaR wyliczona za pomocą modelu CAViaR-ASM dopasowanego do krótkiego szeregu zwrotów



Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

10.5. Uwagi

Engle i Manganelli (1999) przedstawili wyniki eksperymentów Monte Carlo świadczące o tym, że regresja kwantylowa w połączeniu z algorytmem genetycznym daje satysfakcjonujące rezultaty. W pracach (Engle i Manganelli 2004) oraz (Manganelli i Engle 2001) zaprezentowane zostały również rezultaty symulacji Monte Carlo, których celem była ocena możliwości różnych metodologii szacowania wartości zagrożonej. Wynika z nich, że w wypadku szeregów generowanych przez procesy z grubymi ogonami rozkładów najlepsze okazały się modele CAViaR. Z naszych badań przeprowadzonych na wybranych szeregach polskiego rynku finansowego wynika, że wyznaczenie VaR za pomocą modeli CAViaR powinno być poważnie brane pod uwagę również w kontekście tego rynku.

Metody regresji kwantylowej należą do stosunkowo nowych i ich zastosowania w ekonometrii finansowej dopiero się pojawiają. Niemniej wydaje się, że potencjalne ich znaczenie w rozwoju ilościowych metod zarządzania ryzykiem jest duże. Istnieje monografia Koenkera (2005) poświęcona regresji kwantylowej.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

11

Modele przełącznikowe

Jednym ze zjawisk najbardziej charakterystycznych dla finansowych szeregów zwrotów jest występowanie zgrupowań zmienności. Zwykle, analizując szereg, można wyróżnić okresy obniżonej bądź podwyższonej zmienności. Wiążą się one na ogół z występującymi na rynku finansowym fazami lokalnego spokoju i okresami burzliwych zawirowań i stanowią dowód na niemożliwość adekwatnego opisu dynamiki rynku za pomocą modeli liniowych. Przedstawione w poprzednich rozdziałach modele GARCH i modele zmienności stochastycznej dają jedną z możliwości opisu tego zjawiska. Uprawnione jest jednak również odmienne spojrzenie na okresowe zmiany poziomu zmienności i – występujące równolegle – zmiany wielkości zwrotów. Ten inny sposób wychwycenia nie tylko okresowych zmian w średniej i zmienności, ale także pojedynczych skoków czy spadków umożliwiają tzw. modele przełącznikowe.

modele przełącznikowe

Modele przełącznikowe, którym poświęcony jest niniejszy rozdział, opisują sytuację, w której zwroty instrumentu finansowego mogą być modelowane za pomocą modelu z parametrami należącymi do pewnego skończonego podzbioru przestrzeni parametrów, przy czym określony jest proces stochastyczny charakteryzujący możliwości przejścia od jednego wektora parametrów do drugiego. Jeśli przyjmiemy hipotezę, że wymienione wcześniej, charakterystyczne cechy zwrotów są skutkiem „przeskakiwania" układu generującego szereg między kilkoma reżimami, to można za pomocą modeli przełącznikowych szukać odpowiedzi na nasuwające się pytania o różnice między reżimami, prawdopodobieństwa przejścia i czas trwania systemu w obrębie każdego reżimu. Istnieje też pewna szansa na poprawę prognoz zmienności oraz uzyskanie sensownych prognoz zwrotów. Trzeba mieć jednak świadomość faktu, że prognozowanie za pomocą modeli przełącznikowych jest trudne, chociażby z tego powodu, że prognozowalność w poszczególnych reżimach może być odmienna.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

klasy modeli przełącznikowych

Ogólnie można wyróżnić dwie klasy modeli przełącznikowych. Pierwsza charakteryzuje się tym, że reżim obowiązujący w momencie t określony jest przez pewną zmienną obserwowalną. W wypadku drugiej klasy modeli przełącznikowych, przełączanie między reżimami sterowane jest przez pewien nieobserwowalny proces stochastyczny. Piszemy o tym dokładniej w podrozdziale 11.3.

11.1. Modele progowe

autoregresyjny model progowy TAR

Głównym reprezentantem pierwszej z wymienionych powyżej klas modeli przełącznikowych jest autoregresyjny model progowy TAR (*threshold autoregressive*) przedstawiony przez Tonga (1978) oraz Tonga i Lima (1980).

W wersji SETAR (*Self-Exciting* TAR) tego modelu zakłada się, że granica między reżimami dana jest przez ustaloną wartość progową opóźnionej wartości modelowanego szeregu. Przykładem takiego modelu jest:

$$r_t = (a_{0,1} + a_{1,1}\, r_{t-1})(1 - I(r_{t-1} > c)) + (a_{0,2} + a_{1,2} r_{t-1})\, I(r_{t-1} > c) + \varepsilon_t \qquad (11.1)$$

gdzie I oznacza funkcję wskaźnikową.

11.2. Modele wygładzonego przejścia

Opisany w poprzednim podrozdziale model SETAR spotkał się z krytyką ze względu na to, że wartości progowe są punktami nieciągłości średniej warunkowej. W odpowiedzi na tę krytykę, Chan i Tong (1986) oraz Teräsvirta (1994) zaproponowali model autoregresyjny z gładkim przejściem, STAR (*Smooth Transition* AR), w którym przejście pomiędzy reżimami odbywa się za pomocą funkcji zmieniającej się w sposób gładki od 0 do 1, przy rosnącej wartości opóźnionej obserwacji. W przypadku modeli wygładzonego przejścia ST (*Smooth Transition*) przełączanie ma zatem charakter stopniowego, raczej łagodnego przejścia z jednego stanu do drugiego.

model STAR

W najbardziej popularnym przypadku, funkcja przejścia jest funkcją logistyczną:

$$G(x;\gamma,c) = \frac{1}{1+\exp(-\gamma(x-\tau))} \qquad (11.2)$$

a model STAR, odpowiadający modelowi (11.1), ma postać:

$$r_t = (a_{0,1} + a_{1,1} r_{t-1})(1 - G(r_{t-1};\gamma,c)) + (a_{0,2} + a_{1,2} r_{t-1})\, G(r_{t-1};\gamma,c) + \varepsilon_t \qquad (11.3)$$

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

model ST-GARCH

Ponieważ jesteśmy zainteresowani przede wszystkim tematyką modelowania zmienności, rozważymy teraz model ST-GARCH (Lundbergh i Teräsvirta 2000), który pozwala na opis zmian zarówno w średniej warunkowej, jak i w wariancji warunkowej. Jego specyfikacja określona jest następująco:

$$r_t = (a_0(1) + a_1(1)\, r_{t-1})\, G_t + (a_0(2) + a_1(2) r_{t-1})(1 - G_t) + y_t \tag{11.4}$$

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t \tag{11.5}$$

$$\varepsilon_t \sim \text{iid}(0,1)$$

$$\sigma_t^2 = (\omega(1) + \alpha_1(1) y_{t-1}^2 + \beta_1(1)\sigma_{t-1}^2) G_t + (\omega(2) + \alpha_1(2) y_{t-1}^2 + \\ + \beta_1(2)\sigma_{t-1}^2)(1 - G_t) \tag{11.6}$$

gdzie (11.6) jest równaniem wariancji warunkowej, a:

$$G_t = \frac{1}{1 + \exp(\gamma(z_t - \tau))} \tag{11.7}$$

Występująca we wzorze (11.7) zmienna z_t oraz parametr τ odpowiadają za przełączanie między reżimami. Jeśli parametr wygładzania γ jest dodatni, to nierówność $z_t < \tau$ oznacza przewagę reżimu pierwszego ($G_t > 1/2$), a $z_t > \tau$ przewagę reżimu drugiego ($G_t < 1/2$).

Szczególne znaczenie w ekonometrii finansowej mają modele ST-GARCH z czasem jako zmienną przełączającą ($z_t = t$). W takiej sytuacji parametr τ wyznacza datę odpowiadającą momentowi zmiany strukturalnej (zmiany reżimu) w szeregu obserwacji.

11.3. Model Hamiltona

W wypadku drugiej klasy modeli przełącznikowych zakłada się, że reżim występujący w momencie t jest określony przez nieobserwowalny proces przyjmujący M wartości: 1, ..., M. Najbardziej popularnym modelem w tej klasie jest pochodzący od Hamiltona (1989) model przełącznikowy typu Markowa, wyspecjalizowany do opisu aperiodycznych przejść pomiędzy różnymi reżimami. Proces s_t jest tutaj jednorodnym łańcuchem Markowa rzędu pierwszego. Oznacza to, że:

$$P(s_t = k_t \mid s_{t-1} = k_{t-1}, \ldots, s_1 = k_1) = P(s_t = k_t \mid s_{t-1} = k_{t-1}) \tag{11.8}$$

a więc reżim bieżący s_t zależy jedynie od reżimu s_{t-1}.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Model jest zatem opisany przez określenie prawdopodobieństw przejścia z jednego stanu do innego. W oryginalnym modelu Hamiltona w zależności od reżimu zmieniała się specyfikacja średniej warunkowej zwrotu. Jednocześnie pojawiły się modele przełącznikowe typu Markowa, w których przełączenia dotyczą wielkości wariancji zwrotu lub średniej i wariancji jednocześnie (Schwert 1989, Turner, Startz i Nelson 1989). Nieco później Hamilton i Susmel (1994) zaproponowali model ARCH z przełączeniem typu Markowa, przeznaczony do modelowania nagłych dyskretnych zmian w procesie generującym zmienność ewoluującą w czasie.

11.3.1. Specyfikacja modelu

Modelem Hamiltona będziemy nazywać model stanowiący połączenie opisanych ujęć Hamiltona i Hamiltona–Susmela. Oznacza to, że dopuszczamy zmianę reżimu zarówno w średniej warunkowej, jak i w procesie zmienności. Ograniczamy się do rozważania dwóch możliwych reżimów. W takiej sytuacji można przyjąć interpretację, że jeden z reżimów odpowiada rynkowi uspokojonemu, a drugi rynkowi o podwyższonej aktywności. Model ma postać:

specyfikacja modelu Hamiltona

$$r_t - m(s_t) = a_1(r_{t-1} - m(s_{t-1})) + ... + a_p(r_{t-p} - m(s_{t-p})) + y_t \tag{11.9}$$

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t \tag{11.10}$$

$$\sigma_t^2 = (\omega(s_t)(1 + \alpha_1 y_{t-1}^2/\omega(s_{t-1}) + ... + \alpha_p y_{t-p}^2/\omega(s_{t-p})) \tag{11.11}$$

gdzie $\varepsilon_t \sim$ iid(0,1).

W powyższych równaniach zmienna s_t przyjmuje wartości 1 lub 2, a $m(1)$, $m(2)$, $\omega(1)$, $\omega(2)$ są parametrami podlegającymi estymacji. Przedmiotem estymacji są również prawdopodobieństwa przejścia:

$$P(s_t = 1 \mid s_{t-1} = 1) = p_{11}$$

$$P(s_t = 2 \mid s_{t-1} = 1) = p_{12}$$

$$P(s_t = 1 \mid s_{t-1} = 2) = p_{21}$$

$$P(s_t = 2 \mid s_{t-1} = 2) = p_{22}$$

Z interpretacji parametrów p_{ij} wynika, że powinny być one nieujemne oraz powinny zachodzić związki $p_{11} + p_{12} = 1$ i $p_{21} + p_{22} = 1$. Zakładamy, że zmienne s_t

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

tworzą łańcuch Markowa o dwóch stanach, z prawdopodobieństwami przejścia, p_{ij}, $i, j \in \{1,2\}$. Interesującymi parametrami modelu przełącznikowego typu Markowa są również bezwarunkowe prawdopodobieństwa tego, że proces znajduje się w każdym z dwóch reżimów, tzn. $P(s_t = \text{i})$ dla $i = 1,2$. Jeżeli $p_{11} \neq 1$ i $p_{22} \neq 1$, to bezwarunkowe prawdopodobieństwa $P(s_t = i)$, $i = 1,2$, przebywania procesu w i-tym reżimie wyznaczone są jednoznacznie i dane są wzorami:

bezwarunkowe prawdopodobieństwa znajdowania się procesu w danym reżimie

$$P(s_t = 1) = \frac{1 - p_{22}}{2 - p_{11} - p_{22}} \tag{11.12}$$

$$P(s_t = 2) = \frac{1 - p_{11}}{2 - p_{11} - p_{22}} \tag{11.13}$$

Odwrotność prawdopodobieństwa $P(s_t = i)$, oznaczana symbolem $mtr(i)$, może być w takiej sytuacji interpretowana jako oczekiwany czas powrotu procesu do reżimu i (Jakubowski i Sztencel 2001, Hamilton 1994). Symbolem $d(i)$ oznaczamy oczekiwany dalszy czas trwania systemu w reżimie i, wyrażający się w rozważanym przez nas przypadku dwóch reżimów ($i, j = 1,2$) wzorem:

$$d(i) = \frac{1}{1 - p_{ii}} = \frac{1}{p_{ij}} \tag{11.14}$$

oczekiwany czas powrotu procesu do reżimu

Oczekiwany czas trwania jest istotny z punktu widzenia zastosowań omawianych tu modeli w inwestowaniu, ponieważ pozwala ocenić, jaki jest średni okres, w którym system pozostanie w tym samym (np. charakteryzującym się niską zmiennością) reżimie.

11.3.2. Estymacja

Parametry modelu przełącznikowego Hamiltona mogą być estymowane za pomocą technik największej wiarygodności. Ponieważ jednak proces Markowa (s_t) jest nieobserwowalny, to estymacja nie przebiega w sposób standardowy. Przedmiotem estymacji jest w rzeczywistości nie tylko oszacowanie parametrów w równaniu autoregresji i w równaniu wariancji warunkowej w obu reżimach oraz wyliczenie prawdopodobieństw przejścia z jednego reżimu do drugiego, ale również wyznaczenie prawdopodobieństw warunkowych przebywania procesu w każdym reżimie w dowolnym momencie. Logarytm funkcji wiarygodności ma postać:

$$L = \sum_{t=1}^{T} \ln \left[\sum_{j_0=1}^{2} \cdots \sum_{j_p=1}^{2} f(r_t \mid s_t = j_0, \ldots, s_{t-p} = j_p, \mathcal{F}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}) P(s_t = j_0, \ldots, s_{t-p} = j_p \mid \mathcal{F}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}) \right] \tag{11.15}$$

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

We wzorze (11.15), $\mathcal{F}_{t-1}$ reprezentuje historię procesu zwrotów do momentu $t-1$, $f(r_t \mid s_t = j_0, ..., s_{t-p} = j_p, \mathcal{F}_{t-1}; \boldsymbol{\theta})$, gdzie $j_k \in \{1,2\}$ oznacza gęstość warunkową zmiennej r_t, pod warunkiem realizacji ciągu reżimów $(s_t = j_0, ..., s_{t-p} = j_p)$ i historii $\mathcal{F}_{t-1}$, a $\boldsymbol{\theta} = (m(1), m(2), a_1, ..., a_p, \omega(1), \omega(2), \alpha_1, ..., \alpha_p, p_{11}, p_{22})'$.

Postać funkcji $f(r_t \mid s_t = j_0, ..., s_{t-p} = j_p, \mathcal{F}_{t-1})$ zależy od funkcji gęstości g postulowanego rozkładu błędu ε_t (standardowy normalny lub określony jednym ze wzorów (3.23)–(3.25), tzn.:

$$f(r_t \mid s_t = j_0, \ldots, s_{t-p} = j_p, \mathcal{F}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sigma_t(j_0, \ldots, j_p)} g\left(\frac{r_t - \mu_t(j_0, \ldots, j_p)}{\sigma_t(j_0, \ldots, j_p)} \right) \tag{11.16}$$

gdzie:

$$\mu_t(j_0, ..., j_p) = m(j_0) + a_1(r_{t-1} - m(j_1)) + ... + a_p(r_{t-p} - m(j_p)),$$
$$\sigma_t^2(j_0, ..., j_p) = \omega(j_0)(1 + \alpha_1 y_{t-1}^2/\omega(j_1) + ... + \alpha_p y_{t-p}^2 / \omega(j_p))$$

Do wyliczenia logarytmicznej funkcji wiarygodności (11.15) niezbędna jest znajomość prawdopodobieństw $P(s_t = j_0, ..., s_{t-p} = j_p \mid \mathcal{F}_{t-1})$ tego, że w momentach $t, t-1, ..., t-p$ proces znajdował się w reżimach $j_0, j_1, ..., j_p$. W tym celu wykorzystywane są zależności:

$$\begin{aligned} &P(s_t = j_0, \ldots, s_{t-p} = j_p \mid \mathcal{F}_t) = \\ &= \frac{f(r_t \mid s_t = j_0, \ldots, s_{t-p} = j_p, \mathcal{F}_{t-1}) P(s_t = j_0, \ldots, s_{t-p} = j_p \mid \mathcal{F}_{t-1})}{\sum_{i_0=1}^{2} \cdots \sum_{i_p=1}^{2} f(r_t \mid s_t = i_0, \ldots, s_{t-p} = i_p, \mathcal{F}_{t-1}) P(s_t = i_0, \ldots, s_{t-p} = i_p \mid \mathcal{F}_{t-1})} \end{aligned} \tag{11.17}$$

oraz:

$$\begin{aligned} &P(s_t = j_0, \ldots, s_{t-p} = j_p \mid \mathcal{F}_{t-1}) = \\ &= p_{j_1 j_0} \sum_{i_{p+1}=1}^{2} P(s_{t-1} = j_1, \ldots, s_{t-p} = j_p, s_{t-p-1} = i_{p+1} \mid \mathcal{F}_{t-1}) \end{aligned} \tag{11.18}$$

przy czym druga z nich jest konsekwencją właściwości Markowa.

Aby zapoczątkować iterację, na ogół zakłada się, że:

$$P(s_1 = 1 \mid \mathcal{F}_0) = \frac{1 - p_{22}}{2 - p_{11} - p_{22}} \tag{11.19a}$$

$$P(s_1 = 2 \mid \mathcal{F}_0) = \frac{1 - p_{11}}{2 - p_{11} - p_{22}} \tag{11.19b}$$

co oznacza przyjęcie za $P(s_1 = 1 \mid \mathcal{F}_0)$ i $P(s_1 = 2 \mid \mathcal{F}_0)$ bezwarunkowych prawdopodobieństw (11.12) i (11.13) obowiązywania reżimu 1 lub 2.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Jako produkt uboczny estymacji, otrzymujemy ciągi $P(s_t = 1 | \mathcal{F}_{t-1})$, $t = 1, ..., T$, prawdopodobieństw znajdowania się systemu w reżimie 1 w momencie t, pod warunkiem informacji o procesie zwrotów do momentu $t - 1$:

$$P(s_t = 1 | \mathcal{F}_{t-1}) = \sum_{j_1=1}^{2} \dots \sum_{j_p=1}^{2} P(s_t = 1, s_{t-1} = j_1, \dots, s_{t-p} = j_p | \mathcal{F}_{t-1}) \tag{11.20}$$

Oczekiwane średnie warunkowe $\hat{r}_t = E(r_t | \mathcal{F}_{t-1})$ zwrotów i oczekiwane zmienności $\hat{\sigma}_t^2 = E(\sigma_t^2 | \mathcal{F}_{t-1})$ dla modelu (11.9)–(11.11) można wyrazić wzorami:

$$\hat{r}_t = \sum_{j_0=1}^{2} \dots \sum_{j_p=1}^{2} P(s_t = j_0, \dots, s_{t-p} = j_p | \mathcal{F}_{t-1}) \left(m(j_0) + \sum_{n=1}^{p} a_n \left(r_{t-n} - m(j_n) \right) \right) \tag{11.21}$$

$$\hat{\sigma}_t^2 = \sum_{j_0=1}^{2} \dots \sum_{j_p=1}^{2} P(s_t = j_0, \dots, s_{t-p} = j_p | \mathcal{F}_{t-1}) \omega(j_0) \left(1 + \sum_{n=1}^{p} \alpha_n \frac{y_{t-n}^2}{\omega(j_n)} \right) \tag{11.22}$$

Ponieważ zmienne s_t nie są obserwowalne, w badaniach empirycznych zrealizowane reszty y_t z modelu (11.9)–(11.11) obliczamy jako $r_t - \hat{r}_t$.

11.3.3. Prognozowanie

Do prognozowania za pomocą modelu przełącznikowego typu Markowa używa się wzorów analitycznych na średnią i wariancję lub stosuje się symulacje Monte Carlo. Dla modelu Hamiltona analityczne wzory na prognozy zwrotu, $\hat{r}_T(l)$, i zmienności, $\hat{\sigma}_T^2(l) = E(\sigma_{T+l}^2 | \mathcal{F}_T)$, l dni naprzód, mają postać:

$$\hat{r}_T(l) = \sum_{j_0=1}^{2} \dots \sum_{j_p=1}^{2} P(s_{T+l} = j_0, \dots, s_{T+l-p} = j_p | \mathcal{F}_T) \left(m(j_0) + \sum_{n=1}^{p} a_n \left(\hat{r}_T(l-n) - m(j_n) \right) \right) \tag{11.23}$$

$$\hat{\sigma}_T^2(l) = \sum_{j_0=1}^{2} \dots \sum_{j_p=1}^{2} P(s_{T+l} = j_0, \dots, s_{T+l-p} = j_p | \mathcal{F}_T) \omega(j_0) \left(1 + \sum_{n=1}^{p} \alpha_n \frac{\hat{\sigma}_T^2(l-n)}{\omega(j_n)} \right) \tag{11.24}$$

gdzie $\hat{r}_T(k) = r_{T+k}$, $\hat{\sigma}_T^2(k) = y_{T+k}^2$ dla $k \le 0$, a reszty y_t wyliczane są jako $r_t - \hat{r}_t$, przy czym $\hat{r}_t$ dane jest wzorem (11.21).

Występujące we wzorach prawdopodobieństwa $P(s_{T+l} = j_0, ..., s_{T+l-p} = j_p | \mathcal{F}_T)$ wyznacza się rekurencyjnie, korzystając z zależności (11.17) i (11.18). Prognozy są więc w istocie średnimi ważonymi prognoz po wszystkich możliwych konfiguracjach reżimów występujących w okresie od $T + l - p$ do $T + l$, a wagami są prawdopodobieństwa realizacji odpowiednich konfiguracji.

prognozy i wagi

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

11.4. Modele MS-AR-GARCH

Rozważmy raz jeszcze powszechnie stosowany model zwrotów (przyrostów, zmian ceny) r_t instrumentu finansowego:

$$r_t = \mu_t + y_t \tag{11.25}$$

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t \tag{11.26}$$

gdzie $\mu_t = E(r_t \mid \mathcal{F}_{t-1})$ jest średnią warunkową odpowiadającą informacji na temat procesu zwrotów dostępnej do momentu $t-1$, a ε_t są niezależnymi zmiennymi losowymi z zerową średnią i jednostkową wariancją.

11.4.1. Specyfikacja modelu

Omówimy teraz model przełącznikowy typu Markowa MS-AR-GARCH (*Markov Switching* AR-GARCH), w którym zakłada się, że:

$$\mu_t = \mu_t(\boldsymbol{\theta}(s_t)) \tag{11.27a}$$

$$\sigma_t = \sigma_t(\boldsymbol{\theta}(s_t)) \tag{11.27b}$$

gdzie s_t jest jednorodnym łańcuchem Markowa z dwuelementową (dla uproszczenia) przestrzenią stanów $\{1, 2\}$, a $\boldsymbol{\theta}(s_t)$ jest wektorem parametrów modelu właściwych dla reżimu s_t.

Specyfikacja modelu MS-AR(m)-GARCH(p,q) jest następująca (por. Davidson 2004, 2004a):

$$r_t = \phi_0(s_t) + \sum_{i=1}^{m} \phi_i(s_t) r_{t-i} + y_t \tag{11.28}$$

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t \tag{11.29}$$

$$\sigma_t^2 = \omega(s_t) + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i(s_t) y_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i(s_t) \sigma_{t-i}^2 \tag{11.30}$$

gdzie ε_t są niezależnymi zmiennymi losowymi mającymi zerową średnią, jednostkową wariancję, potencjalnie zależnymi od pewnych parametrów, które również mogą podlegać przełączaniu (np. ilość stopni swobody lub parametr asymetrii w skośnym rozkładzie t Studenta).

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

11.4.2. Estymacja modelu MS-AR-GARCH

Parametry modelu MS-AR(m)-GARCH(p,q) mogą być estymowane za pomocą technik metody największej wiarygodności. Ponieważ jednak proces reżimów s_t nie jest obserwowalny, estymacja, podobnie jak w wypadku modelu Hamiltona, nie może przebiegać w sposób standardowy. Przedmiotem estymacji są parametry w równaniach średniej i wariancji warunkowej, prawdopodobieństwa przejścia, parametry rozkładu innowacji ε_t oraz ciąg $P(s_1 = 1|\,\mathcal{F}_{t-1})$ prawdopodobieństw warunkowych obowiązywania reżimu 1 w momencie t przy danym zbiorze informacji $\mathcal{F}_{t-1}$. W ogólnym wypadku, niełatwym problemem jest również zależność zmienności σ_t^2 od całej zrealizowanej ścieżki reżimów s_t, s_{t-1}, ..., s_1, wynikająca z postaci równania (11.30), opisującego wariancję warunkową. Trudność tę można obejść dokonując odpowiedniej transformacji przekształcającej model GARCH(p,q) w model ARCH(∞). Wprowadzając wielomiany operatorowe:

$$\alpha(j)(L) \equiv \alpha_1(j)L + ... + \alpha_q(j)L^q$$

$$\beta(j)(L) \equiv 1 - \beta_1(j)L - ... - \beta_p(j)L^q$$

gdzie L jest operatorem opóźnienia, określonym równością $L^k(x_t) = x_{t-k}$, można, przy założeniu, że pierwiastki wielomianu $\beta(j)(z)$ mają moduły większe od 1, wynik tej transformacji, zastosowanej do równania (11.30), zapisać w postaci:

$$\sigma_t^2 = \frac{\omega(s_t)}{1-\beta_1(s_t)-\ldots-\beta_p(s_t)} + \frac{\alpha(s_t)(L)}{\beta(s_t)(L)} y_t^2 = \delta_0(s_t) + \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i(s_t) y_{t-i}^2$$

w której σ_t^2 zależy bezpośrednio jedynie od aktualnego reżimu s_t.

Niech:

$$\boldsymbol{\theta} = [\phi_0(1), \phi_0(2), ..., \phi_m(1), \phi_m(2), \omega(1), \omega(2), \alpha_1(1), \alpha_1(2), ..., \alpha_q(1), \alpha_q(2), \beta_1(1), \beta_2(2), ..., \beta_p(1), \beta_p(2), v, p_{11}, p_{12}]'$$

oznacza wektor parametrów modelu (11.28) – (11.30). Funkcja logarytmicznej wiarygodności, którą maksymalizujemy, ma postać:

$$L = \sum_{t=1}^{T} \ln\left(\sum_{j=1}^{2} f(r_t \mid s_t = j, \mathcal{F}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}) P(s_t = j \mid \mathcal{F}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}) \right) \tag{11.31}$$

gdzie:

$$f(r_t \mid s_t = j, \mathcal{F}_{t-1}) = \frac{1}{\sigma_t(j)} g_j\left(\frac{r_t - \mu_t(j)}{\sigma_t(j)} \right) \tag{11.32}$$

$$\mu_t(j) = \phi_0(j) + \phi_1(j)\, r_{t-1} + ... + \phi_m(j) r_{t-1} \tag{11.33}$$

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

$$\sigma_t^2(j) = \omega(j) + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i(j) y_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i(j) \sigma_{t-i}^2 \tag{11.34}$$

przy czym g_j jest gęstością innowacji odpowiadającej reżimowi j. Występujące we wzorze (11.31) prawdopodobieństwa $P(s_t = j \mid \mathcal{F}_{t-1})$ są wyliczane za pomocą procedury rekurencyjnej:

$$P(s_t = j \mid \mathcal{F}_1) = \sum_{i=1}^{2} p_{ij} P(s_{t-1} = i \mid \mathcal{F}_1) \tag{11.35}$$

$$P(s_t = j \mid \mathcal{F}_t) = \frac{f(r_t \mid s_t = j, \mathcal{F}_{t-1}) P(s_t = j \mid \mathcal{F}_{t-1})}{\sum_{i=1}^{2} f(r_t \mid s_t = i, \mathcal{F}_{t-1}) P(s_t = i \mid \mathcal{F}_{t-1})} \tag{11.36}$$

Jako wartości początkowe $P(s_t = 1 \mid \mathcal{F}_0)$ oraz $P(s_t = 2 \mid \mathcal{F}_0)$ przyjmujemy prawdopodobieństwa bezwarunkowe dane wzorami (11.12) i (11.13).

Oczekiwana w próbie średnia warunkowa $\hat{r}_t$ oraz zmienność $\hat{\sigma}_t^2 = E(\sigma_t^2 \mid \mathcal{F}_{t-1})$ wyliczane są w następujący sposób:

$$\hat{r}_t = \sum_{j=1}^{2} P(s_t = j \mid \mathcal{F}_{t-1}) \left(\phi_0(j) + \sum_{i=1}^{m} \phi_i(j) r_{t-i} \right) \tag{11.37}$$

$$\hat{\sigma}_t^2 = \sum_{j=1}^{2} P(s_t = j \mid \mathcal{F}_{t-1}) \left(\delta_0(j) + \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i(j) y_{t-i}^2 \right) \tag{11.38}$$

Nietrudno zauważyć, iż wielkości te są równe średnim ważonym, odpowiednio, warunkowej średniej i wariancji warunkowej w obu reżimach, przy czym wagami są warunkowe prawdopodobieństwa $P(s_t = j \mid \mathcal{F}_{t-1})$ obowiązywania tych reżimów. Ponieważ zmienne s_t nie są obserwowalne, zrealizowane reszty y_t wylicza się jako $r_t - \hat{r}_t$.

11.4.3. Prognozowanie

Analityczne wzory na prognozy zwrotu, $\hat{r}_T(l)$, i zmienności, $\hat{\sigma}_T^2(l) = E(\sigma_{T+l}^2 \mid \mathcal{F}_T)$, l dni naprzód, na podstawie modelu MS-AR-GARCH, mają postać:

$$\hat{r}_T(l) = \sum_{j=1}^{2} P(s_{T+l} = j \mid \mathcal{F}_T) \left(\phi_0(j) + \sum_{i=1}^{m} \phi_i(j) \hat{r}_T(l-i) \right) \tag{11.39}$$

$$\hat{\sigma}_T^2(l) = \sum_{j=1}^{2} P(s_{T+l} = j \mid \mathcal{F}_T) \left(\delta_0(j) + \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i(j) \hat{\sigma}_T^2(l-i) \right) \tag{11.40}$$

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

gdzie $\hat{r}_T(k) = r_{T+k}$, $\hat{\sigma}_T^2(k) = y_{T+k}^2$ dla $k \le 0$, y_t są wyliczane jako $r_t - \hat{r}_t$, a prawdopodobieństwa $P(s_{T+l} = j \mid \mathcal{F}_T)$ mogą być obliczone przy użyciu wzorów rekurencyjnych (11.35) i (1.36).

Podobnie jak w wypadku oczekiwanej średniej warunkowej i zmienności w próbie, prognozy są równe średnim ważonym prognoz w poszczególnych reżimach, przy czym wagami są warunkowe prawdopodobieństwa występowania tych reżimów.

11.5. Od teorii do praktyki

Przyjrzymy się teraz oszacowaniom zmienności uzyskanym za pomocą modeli przełącznikowych Hamiltona i MS-AR-GARCH. Podobnie jak w poprzednich rozdziałach przedstawiamy oszacowania w próbie i wyznaczamy prognozy zmienności.

Oszacowania parametrów modeli przedstawione w tym podrozdziale zostały uzyskane za pomocą programu J. Davidsona TSM 4.26 (Davidson 2008). Zarówno w wypadku modeli Hamiltona MS-GARCH, jak i ST-GARCH często pojawiają się problemy numeryczne z powodu występowania wielu lokalnych maksimów logarytmicznej funkcji wiarygodności.

11.5.1. Zastosowanie modeli Hamiltona

Przedstawimy najpierw oszacowania modeli Hamiltona. W tabelach zawierających oszacowania parametrów modeli podane zostały również bezwarunkowe prawdopodobieństwa występowania reżimu pierwszego ($P(s_t = 1)$), średni czas powrotu do każdego reżimu ($mtr(1)$, $mtr(2)$) oraz oczekiwane czasy trwania w reżimach ($d(1)$, $d(2)$).

Model dla szeregu WIG*d* stanowi przykład modelu źle dopasowanego. Co prawda reżimy wyraźnie różnią się poziomami zmienności i średniej warunkowej (tabela 11.1), ale oszacowania prawdopodobieństw są niezadowalające. Niemniej możemy pokusić się o interpretację dynamiki zmienności w języku łańcuchów Markowa. Reżim pierwszy stanowi barierę odpychającą (prawdopodobieństwo pozostania w nim wynosi 0). Jeśli proces znajduje się w stanie drugim, to z niemal równymi prawdopodobieństwami może w nim pozostać albo przejść do reżimu pierwszego. Oczekiwane czasy trwania w reżimach są krótkie (1 i 2 dni). Przyjmując interpretację podaną w podrozdziale 11.3.1, możemy stwierdzić, że rynek tylko chwilowo się uspokaja, a po okresie aktywności może

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

z prawie takim samym prawdopodobieństwem wystąpić krótkotrwały okres uspokojenia, jak i dalsza wysoka aktywność.

Rozważając zachowanie indeksu WIG w okresie po 17.11.2000 (WIG*k*) na podstawie dopasowanego modelu przełącznikowego (tabela 11.1), można zauważyć, że reżim pierwszy charakteryzuje średnia wartość zwrotu około 1 i wyższa wariancja. Można przyjąć, że odpowiada on raczej okresowi rynku aktywnego. Model jest poprawnie oszacowany. Oba reżimy są raczej zachowawcze, aczkolwiek proces nieco łatwiej przechodzi z dużej aktywności w fazę uspokojenia niż odwrotnie.

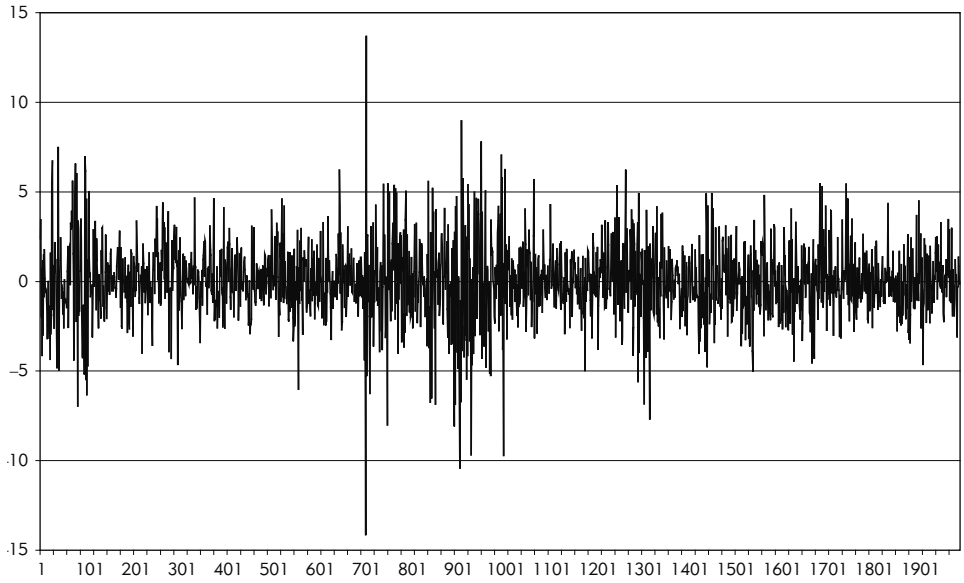
Opisane przez model przełącznikowy zachowanie długiego szeregu zwrotów indeksu WIG20 (WIG20*d*) wykazuje wyraźne dwa reżimy ze względu na wariancję (niska lub wysoka). Oszacowania średniej w obu reżimach są nieistotne. Oba reżimy są stabilne w tym sensie, że prawdopodobieństwa przejścia z jednego do drugiego mają niskie wartości. Ilustracje 11.1–11.3 przedstawiają zwroty, zmienność w próbie i odpowiednie prawdopodobieństwa warunkowe pozostania w reżimie pierwszym.

Tabela 11.1. Oszacowania parametrów modeli przełącznikowych Hamiltona. WIG i WIG20

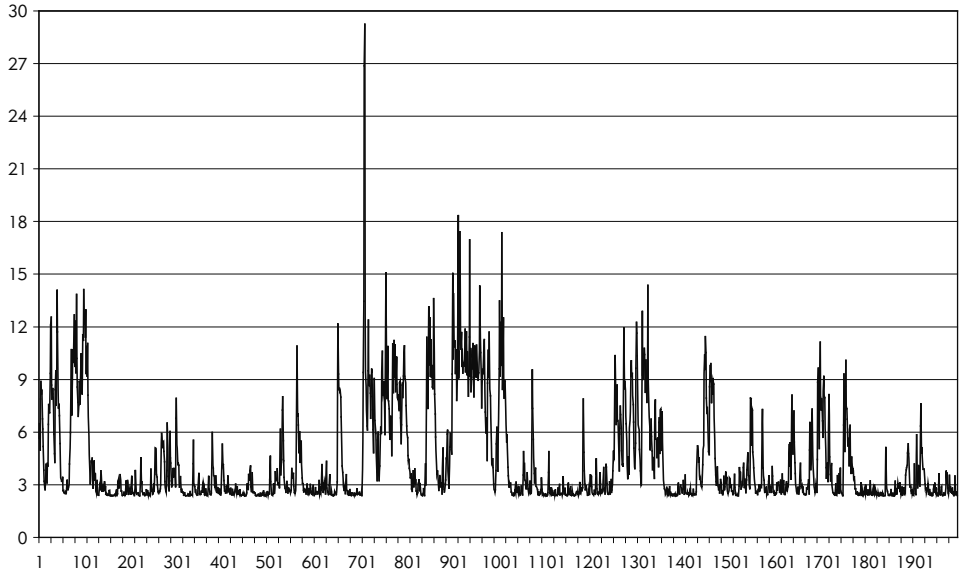
Szereg	**WIG*d***		**WIG*k***		**WIG20*d***	
Rozkład	***t* Studenta**		**Normalny**		**Normalny**	
DF	14,0460		–		–	
a_1	0,1768 (0,0315)		–0,1056 (0,0540)		0,0702 (0,0253)	
$m(1)$	0,0171 (0,0833)		1,0215 (0,4426)		0,0122 (0,0464)	
$m(2)$	–0,0008 (0,0547)		0,0306 (0,1394)		0,0476 (0,1740)	
$\omega(1)$	0,6680 (0,2523)		1,7026 (0,8524)		2,2156 (0,2067)	
$\omega(2)$	2,2672 (0,1856)		0,9927 (0,2076)		9,3982 (1,6345)	
α_1	0,4299 (0,0508)		0,0328 (0,0746)		0,0964 (0,0372)	
Prawdopodobieństwa przejścia						
Reżim	1	2	1	2	1	2
1	0	1	0,8650	0,1350	0,9891	0,0109
2	0,4742	0,5258	0,0170	0,9830	0,0347	0,9653
$P(s_t = 1)$	0,3217		0,1118		0,7610	
$mt(1)$	3,1088		8,9412		1,3141	
$mt(2)$	1,4743		1,1259		4,1835	
$d(1)$	1		2,3935		91,743	
$d(2)$	2,1088		58,823		28,8184	

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 11.1. WIG20*d*. Procentowe zwroty logarytmiczne

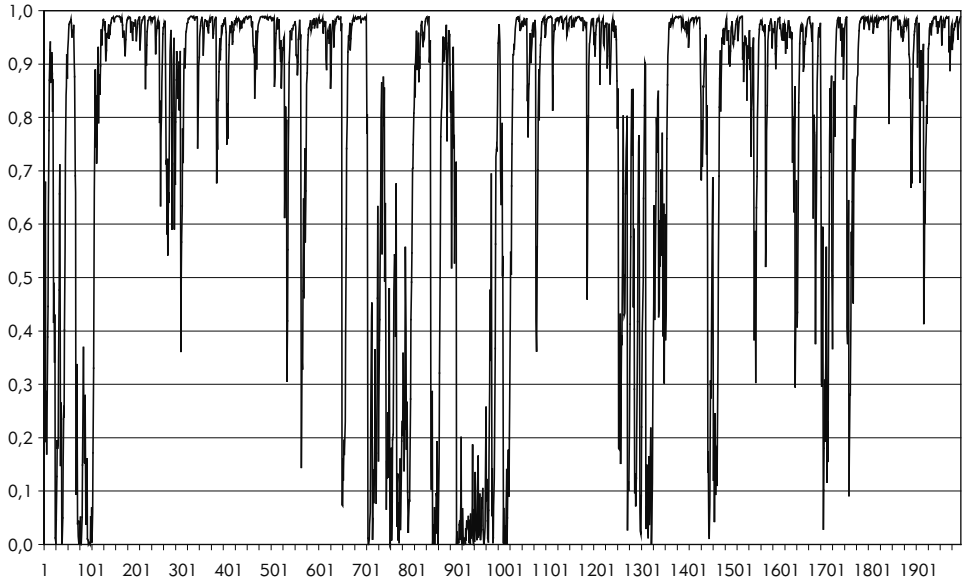


Ilustracja 11.2. WIG20*d*. Oszacowania zmienności dziennej w próbie otrzymane za pomocą modelu przełącznikowego Hamiltona

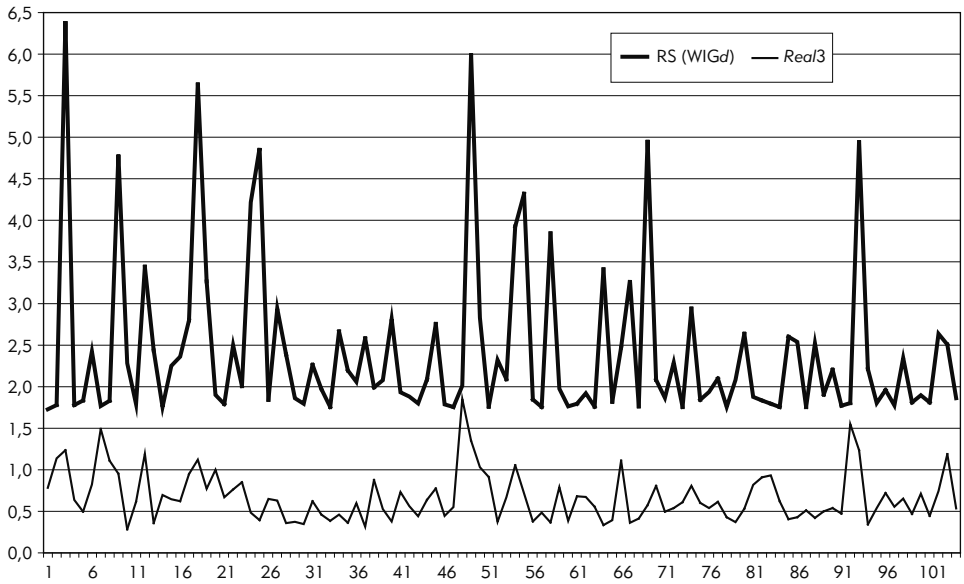


Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 11.3. WIG20*d*. Wyznaczone przez model przełącznikowy Hamiltona prawdopodobieństwa warunkowe pozostania w pierwszym reżimie

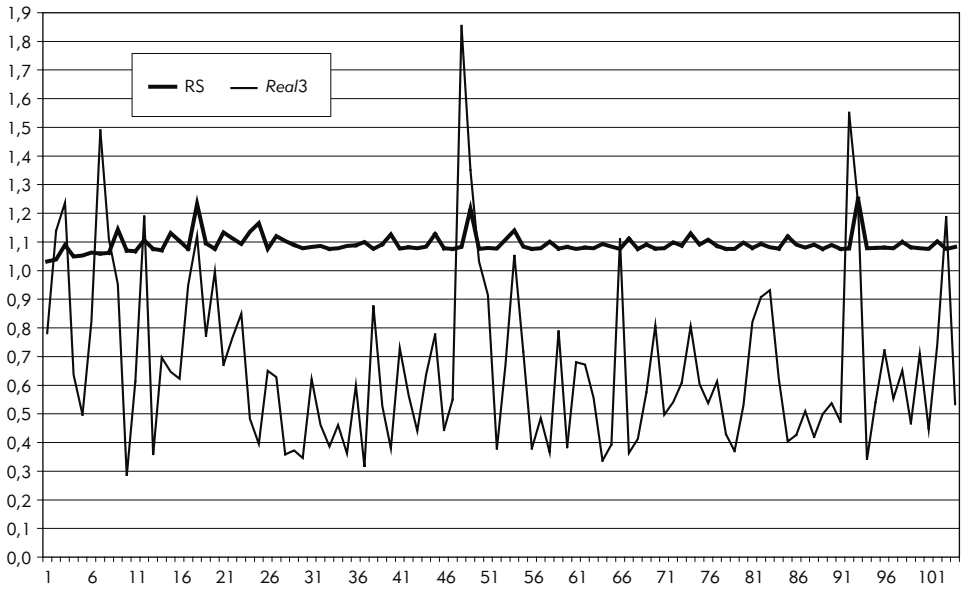


Ilustracja 11.4. WIG*d*. Prognozy zmienności na okres 2.01.2003–30.05.2003 uzyskane za pomocą modelu przełącznikowego

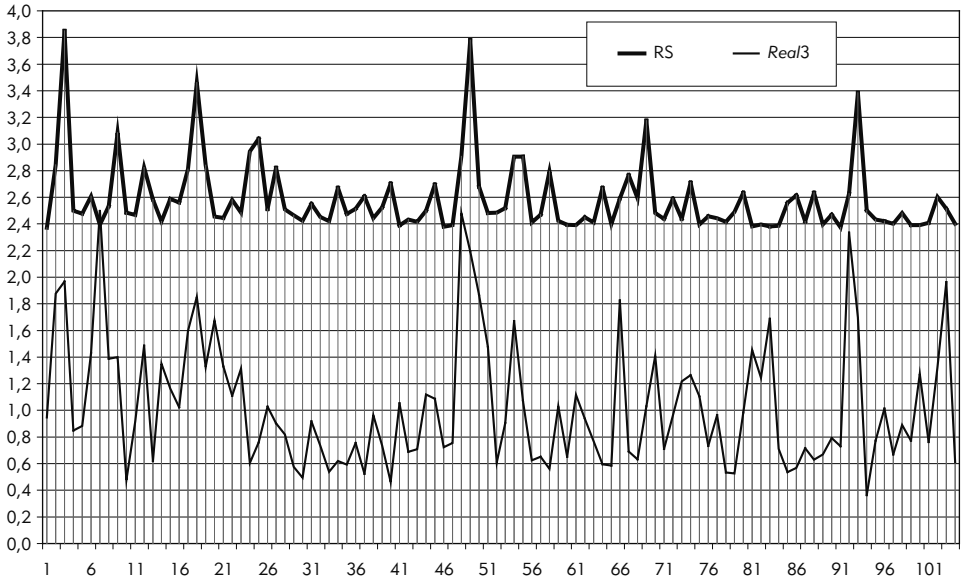


Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 11.5. WIG*k*. Prognozy zmienności na okres 2.01.2003–30.05.2003 uzyskane za pomocą modelu przełącznikowego



Ilustracja 11.6. WIG20*d*. Prognozy zmienności na okres 2.01.2003–30.05.2003 uzyskane za pomocą modelu przełącznikowego



Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

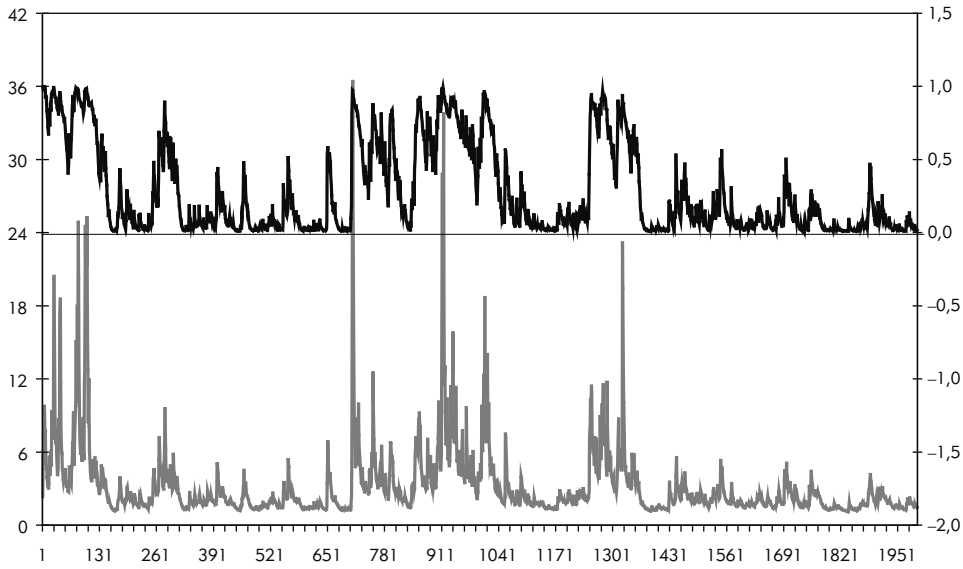
Ilustracje 11.4–11.6 przedstawiają zestawienia prognoz zmienności uzyskanych dla indeksów WIG i WIG20 za pomocą omówionych wyżej modeli przełącznikowych. Prognozy zmienności (wariancji warunkowej) porównane są z dzienną zmiennością zrealizowaną *Real*3, obliczaną jako odpowiednio przeskalowana suma kwadratów zwrotów pięciominutowych. Prognozy te są przeszacowane we wszystkich trzech przedstawionych powyżej przypadkach.

11.5.2. Modelowanie zmienności za pomocą modeli MS-AR-GARCH

Zobaczmy teraz, jak do szeregów WIG*d* oraz WIG20*d* dopasowują się modele MS-AR-GARCH. Przypomnijmy, że w poprzednim podrozdziale, gdy stosowaliśmy modele Hamiltona, reżimy różniły się tylko poziomem średniej i poziomem wariancji bezwarunkowej. Obecnie estymujemy modele, dla których możliwe jest przełączanie wszystkich parametrów modelu, co zwiększa ich elastyczność i daje możliwość rozróżnienia charakteru dynamiki zmienności w poszczególnych reżimach.

Model Hamiltona nie mógł dobrze opisać dynamiki stóp zwrotu indeksu WIG. Rozważany w niniejszym podrozdziale model MS-GARCH pozwala na to z łatwością. Na ilustracji 11.7 widzimy klarowną dynamikę prawdopodobieństw warunkowych.

Ilustracja 11.7. WIG. Zmienność (linia szara)i warunkowe prawdopodobieństwa pozostawania w reżimie pierwszym (o wysokiej zmienności) (linia czarna) oszacowane za pomocą modelu MS-GARCH



Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Analizując ilustrację 11.7 i tabelę 11.2 zauważamy, że reżim pierwszy charakteryzuje się wysokim poziomem zmienności, a drugi niskim. Zmienność w reżimie pierwszym silniej reaguje na nowe informacje i jest mniej persystentna. Trzy wyraźnie widoczne okresy podwyższonej zmienności są następujące:

1) styczeń 1995–wrzesień 1995 (prawdopodobnie w wyniku rozwoju giełdy),
2) październik 1997–marzec 1999 (ciąg kryzysów: azjatycki, rosyjski, brazylijski),
3) styczeń 2000–wrzesień 2000.

Tabela 11.2. Oszacowania parametrów modeli MS-GARCH dla długich szeregów stóp zwrotu indeksów WIG i WIG20

Szereg	**WIG*d***		**WIG20*d***	
Rozkład	***t* Studenta**		***t* Studenta**	
$\phi_1(1)$	0,1732 (0,0231)		–	
$\phi_1(2)$				
$\omega(1)$	1,5453 (0,5263)		0,0651 (0,0241)	
$\omega(2)$	0,1128 (0,0502)			
$\alpha_1(1)$	0,2683 (0,0672)		0,2658 (0,0891)	
$\alpha_1(2)$	0,0571 (0,0163)		0,0215 (0,0097)	
$\beta_1(1)$	0,5157 (0,0893)		0,7614 (0,0617)	
$\beta_1(2)$	0,8787 (0,0347)		0,9670 (0,0145)	
DF(1)	20,033 (15,524)		10,614 (2,3531)	
DF(2)	8,5443 (1,6253)			
Prawdopodobieństwa przejścia				
Reżim	1	2	1	2
1	0,9854	0,0146	0,8409	0,1591
2	0,0069	0,9931	0,1100	0,8899
$P(s_t=1)$	0,3209		0,4090	
$mt(1)$	3,1169		2,4451	
$mt(2)$	1,4726		1,6920	
$d(1)$	68,49		6,29	
$d(2)$	144,93		9,09	

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

11.5.3 Modele ST-GARCH i modele MS-AR-GARCH – porównanie

Przedstawimy teraz badanie (Doman i Doman 2007), które pozwoli nam na dokonanie porównania pomiędzy mechanizmami modeli ST-GARCH i modeli MS-GARCH. Przy okazji uzyskamy odpowiedź na pytanie dotyczące charakteru zmian strukturalnych w szeregach stóp zwrotu kursów wymiany złotego względem euro, funta, korony norweskiej i dolara (EUR/PLN, GBP/PLN, NOK/PLN, USD/PLN). Rozważane w niniejszym podrozdziale dzienne notowania kursów walutowych obejmują okres 16.05.1995–31.03.2006, a zatem obserwacje rozpoczynają się w momencie częściowego upłynnienia kursu PLN, które nastąpiło z dniem 16 maja 1995 (wprowadzono wtedy system pełzającego pasma – *crawling band*) i obejmują okres po uwolnieniu PLN (od 12 kwietnia 2000 roku).

Dla każdego spośród badanych szeregów estymowane były modele MS-GARCH i ST-GARCH. Estymacja zaczynała się od modeli z przełączaniem wszystkich parametrów. Następnie, w zależności od uzyskiwanych wyników, w każdym wypadku dobierano zestaw parametrów podlegających przełączaniu. Oszacowania parametrów dopasowanych modeli MS-GARCH zamieszczono w tabeli 11.3, a modeli wygładzonego przejścia ST-GARCH w tabeli 11.4. W modelach MS-GARCH mamy przeważnie do czynienia z większą liczbą przełączanych parametrów. W szczególności, we wszystkich przypadkach przełączaniu podlega liczba stopni swobody w rozkładzie błędu.

Na ilustracjach 11.8–11.10 przedstawione zostały kolejno stopy zwrotu kursu EUR/PLN, odpowiadające im oszacowania zmienności w próbie oraz wykresy warunkowych prawdopodobieństw obowiązywania reżimu 2 (wysokiej zmienności kursu) i funkcja wygładzonego przejścia z reżimu 1 do reżimu 2. W wypadku tego kursu walutowego, modele zgodnie wyznaczają moment przełączenia na marzec 1998 roku. Zmianę reżimu możemy więc wiązać z rozszerzeniem pasma wahań, które nastąpiło w lutym 1998 roku.

Wykresy funkcji przejścia oszacowanej za pomocą modelu ST-GARCH oraz warunkowych prawdopodobieństw występowania reżimów, wyliczonych za pomocą modelu MS-GARCH, widoczne na ilustracjach 11.10–11.13, pozwalają na stwierdzenie, że modele w zasadzie zgodnie wyznaczają momenty zmiany reżimu. Jednak modele przełącznikowe typu Markowa, mając bardziej elastyczną strukturę, mogą wychwytywać także krótkotrwałe zmiany w poziomie zmienności.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Tabela 11.3. Oszacowania parametrów modeli MS-GARCH

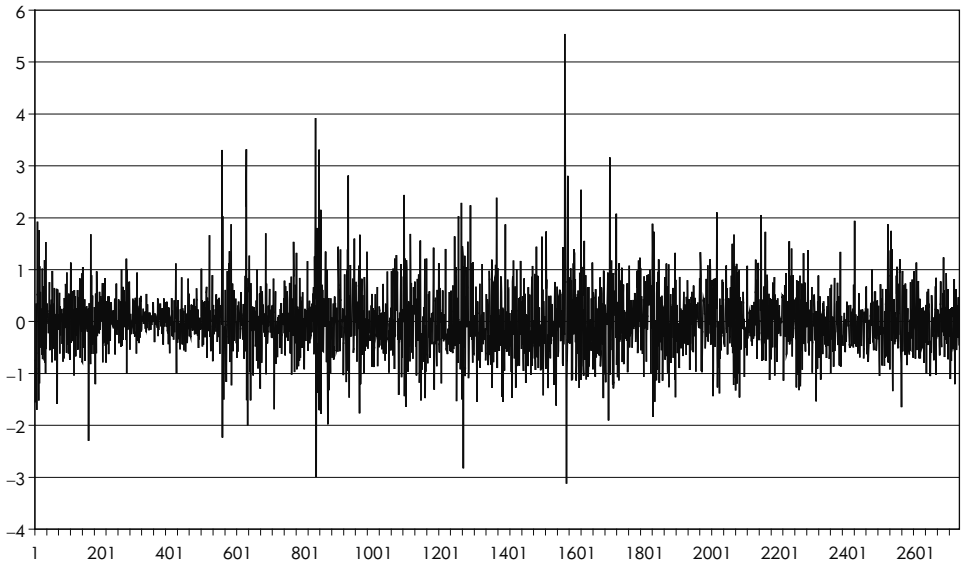
Szereg	**EUR/PLN**		**GBP/PLN**		**NOK/PLN**		**USD/PLN**	
Rozkład błędu	***t* Studenta**		***t* Studenta**		***t* Studenta**		***t* Studenta**	
Reżim	**1**	**2**	**1**	**2**	**1**	**2**	**1**	**2**
a_1	– 0,7820 (0,0231)	– 0,1799 (0,0639)	– 0,0473 (0,0223)	– 0,3172 (0,0400)	– 0,0663 (0,0248)	– 0,2438 (0,0676)	–	–
ω	0,0233 (0,0081)	0,0579 (0,0133)	0,0124 (0,0054)		0,0846 (0,0355)	0,0648 (0,0219)	0,0515 (0,0163)	0,0200 (0,0064)
α_1	0,0956 (0,0204)	0,1007 (0,0588)	0,1064 (0,0178)		0,1253 (0,0260)	0,2183 (0,1215)	0,1473 (0,0287)	
β_1	0,8535 (0,0345)	0,4960 (0,1275)	0,7646 (0,0371)		0,7089 (0,0780)	0,3514 (0,2178)	0,7443 (0,0543)	
DF	7,4899 (1,2558)	4,2413 (1,0124)	9,3999 (2,0561)	3,9980 (0,5630)	9,1107 (2,1563)	4,6630 (1,3195)	8,4904 (1,5624)	4,1497 (0,6938)
Prawdopodobieństwa przejścia								
Reżim	1	2	1	2	1	2	1	2
1	0,9997	0,0003	0,996	0,004	0,998	0,002	0,999	0,001
2	0,0006	0,9994	0,001	0,999	0,008	0,992	0,001	0,999

Tabela 11.4. Oszacowania parametrów modeli ST-GARCH

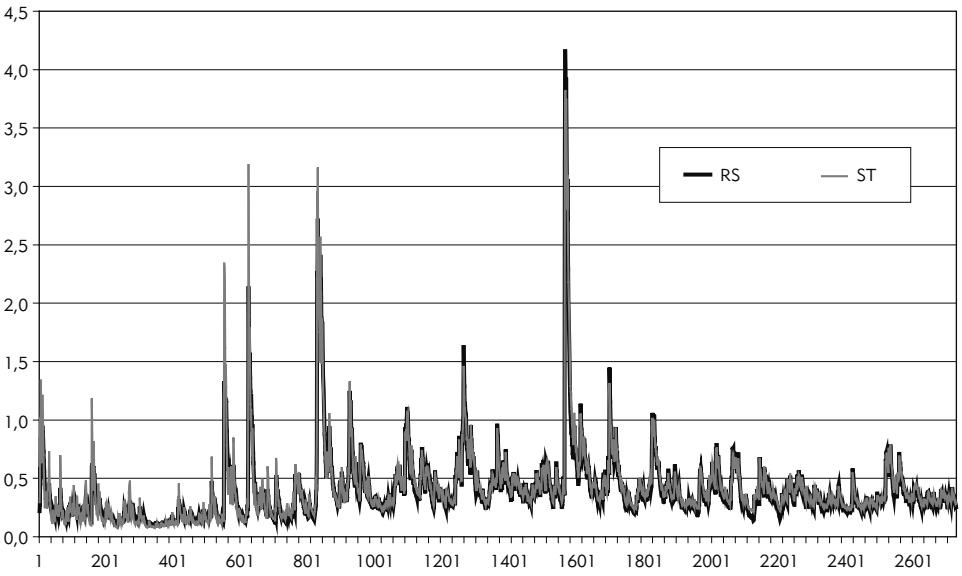
Szereg	**EUR/PLN**		**GBP/PLN**		**NOK/PLN**		**USD/PLN**	
Rozkład błędu	***t* Studenta**		***t* Studenta**		***t* Studenta**		***t* Studenta**	
Reżim	**1**	**2**	**1**	**2**	**1**	**2**	**1**	**2**
τ	775,18 (120,13)		539,49 (74,48)		415,05 (0,0678)		872,80 (219,03)	
γ	0,0090 (0,0030)		0,0128 (0,0063)		24,55 (1,2760)		–0,0030 (0,0017)	
a_0	0,0332 (0,0138)	–0,0372 (0,0118)	0,0741 (0,0134)	–0,0195 (0,0141)	0,0187 (0,0083)		–0,0513 (0,0275)	0,0854 (0,0196)
a_1	–0,1425 (0,0217)		–0,2292 (0,0441)	–0,0345 (0,0232)	–0,3334 (0,0521)	-0,0660 (0,0223)	–	–
ω	0,0205 (0,0147)	0,0211 (0.0104)	0,0223 (0,0071)	0,0718 (0,0210)	0,0500 (0,0121)	0,0484 (0,0185)	0,0357 (0,0168)	0,0854 (0,0196)
α_1	0,2078 (0,0775)	0,0787 (0,0104)	0,1086 (0,0205)		0,2769 (0,0757)	0,1225 (0,0274)	0,1130 (0,0467)	0,3830 (0,1080)
β_1	0,7068 (0,1151)	0,8784 (0,0450)	0,7424 (0,0567)		0,3279 (0,1022)	0,7839 (0,0577)	0,8311 (0,0756)	0,1927 (0,2555)
DF	5,7236 (0,6658)		7,2949 (1,0356)		6,8793 (0,9616)		6,4706 (0,8577)	

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 11.8. Procentowe logarytmiczne stopy zwrotu kursu walutowego EUR/PLN. Okres 16.04.1995–31.03.2006

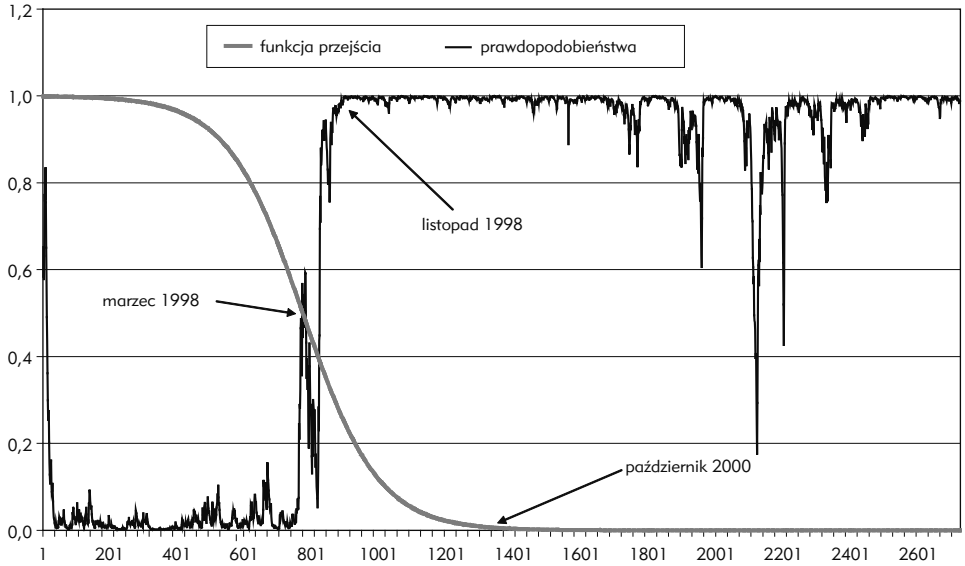


Ilustracja 11.9. EUR/PLN. Oszacowania zmienności w próbie. Okres 16.04.1995–31.03.2006

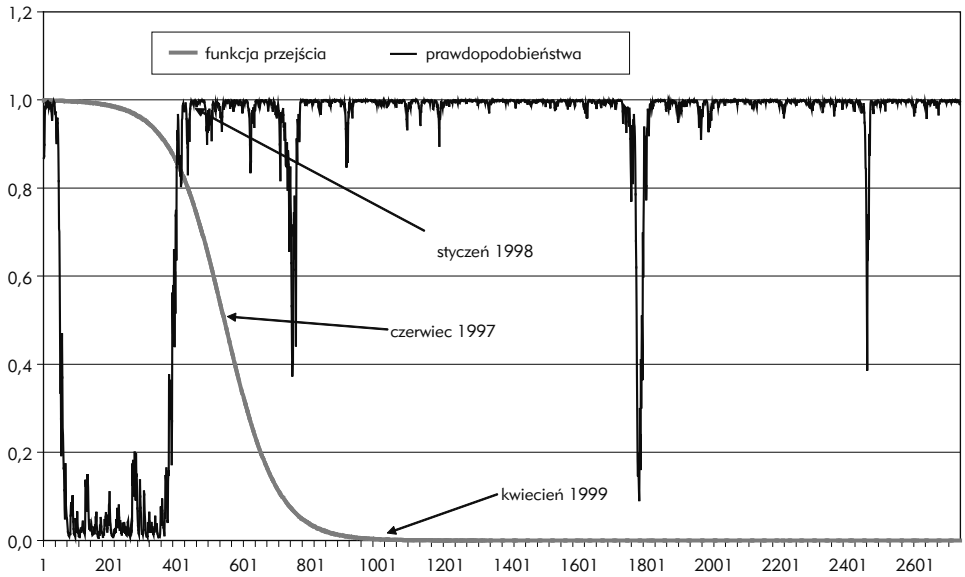


Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 11.10. EUR/PLN. Funkcja przejścia z reżimu 1 do reżimu 2 dla modelu ST-GARCH oraz warunkowe prawdopodobieństwa występowania reżimu 2 dla modelu MS-GARCH

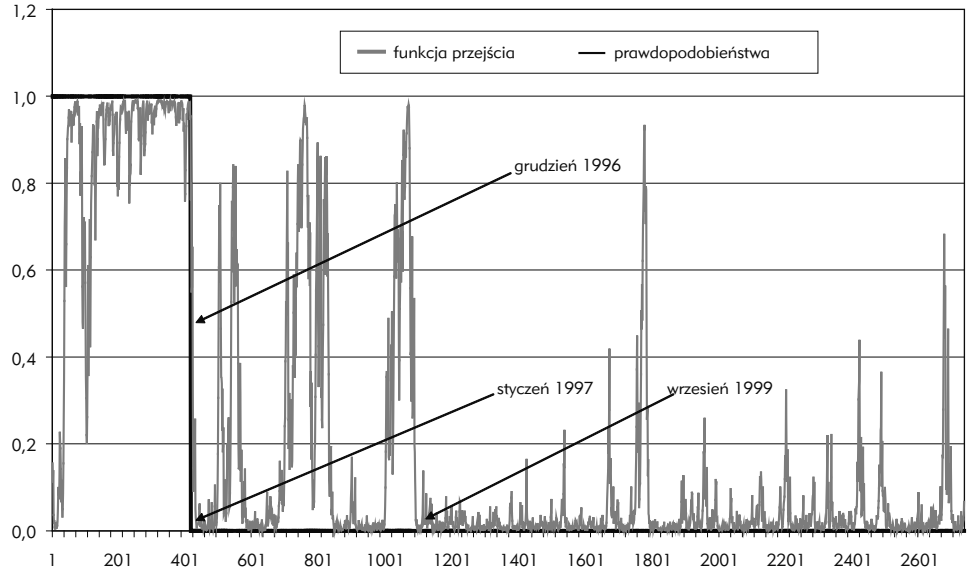


Ilustracja 11.11. GBP/PLN. Funkcja przejścia z reżimu 1 do reżimu 2 dla modelu ST-GARCH oraz warunkowe prawdopodobieństwa występowania reżimu 2 dla modelu MS-GARCH

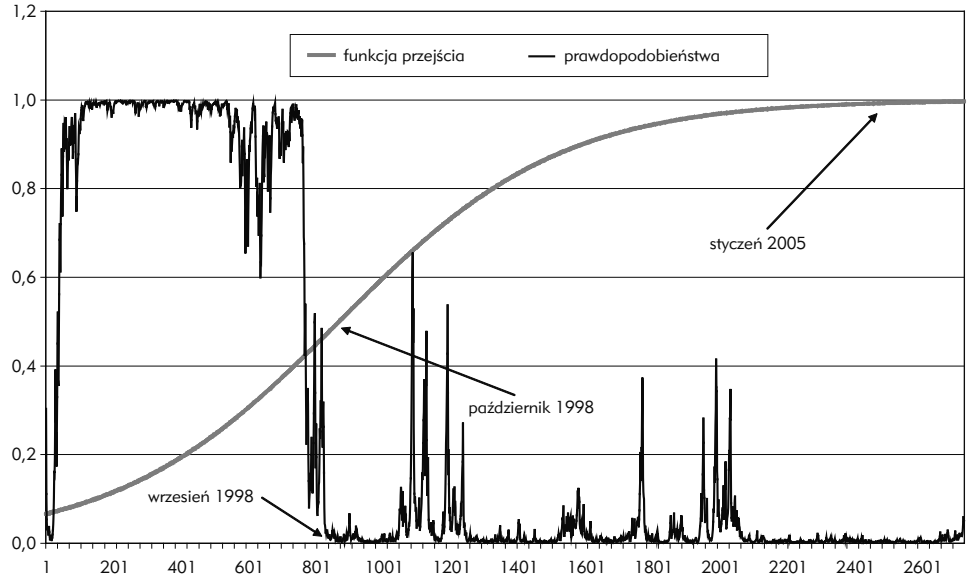


Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 11.12. NOK/PLN. Funkcja przejścia z reżimu 1 do reżimu 2 dla modelu ST-GARCH oraz warunkowe prawdopodobieństwa występowania reżimu 2 dla modelu MS-GARCH



Ilustracja 11.13. USD/PLN. Funkcja przejścia z reżimu 1 do reżimu 2 dla modelu ST-GARCH oraz warunkowe prawdopodobieństwa występowania reżimu 2 dla modelu MS-GARCH



Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

W tabeli 11.5 zamieszczono ocenę jakości prognoz. Poziomem odniesienia dla prognoz zmienności są wartości dziennej zmienności zrealizowanej (*Real*1) wyliczane jako sumy kwadratów pięciominutowych stóp zwrotu. W wypadku kursów EUR/PLN i USD/PLN wyższe wartości uznawanego za najważniejszy wskaźnik jakości prognoz współczynnika R^2 regresji Mincera–Zarnowitza dają prognozy modelu wygładzonego przejścia. Jeśli chodzi o wielkość błędów, to jedyny przypadek zdecydowanej przewagi dotyczy kursu NOK/PLN, gdzie lepszy okazuje się model przełącznikowy typu Markowa.

Tabela 11.5. Ocena jakości prognoz (pola wyróżnione oznaczają mniejsze wartości błędów)

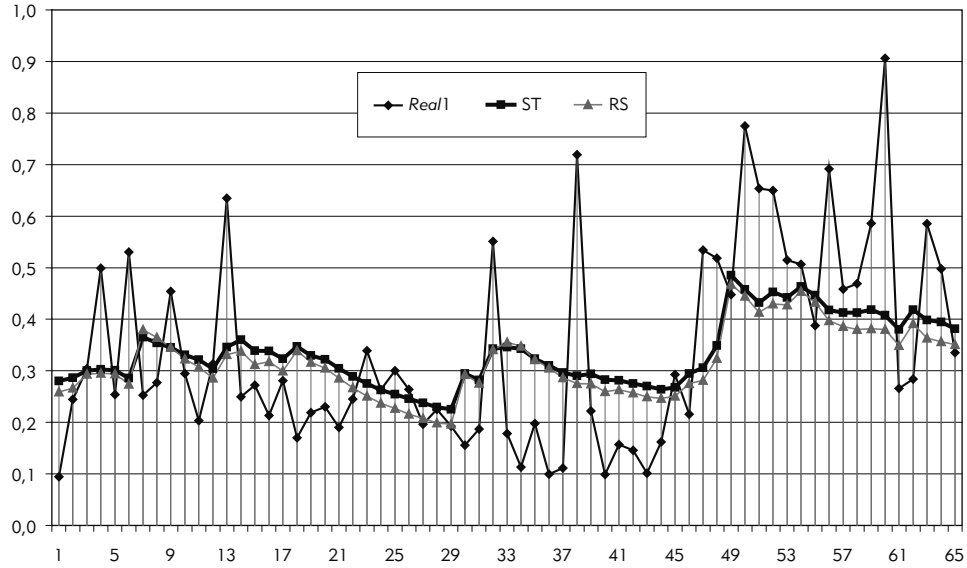
Szereg zwrotów	**EUR/PLN**		**GBP/PLN**		**NOK/PLN**		**USD/PLN**	
Model	**ST**	**MS**	**ST**	**MS**	**ST**	**MS**	**ST**	**MS**
R^2	**0,36**	0,31	0,09	**0,10**	0,22	**0,23**	**0,20**	0,16
MSE	0,0253	0,0267	0,0432	0,0444	0,0398	0,0373	0,0916	0,1032
MedSE	0,0123	0,0096	0,0125	0,0116	0,0164	0,0153	0,0339	0,0236
ME	0,0037	0,0209	0,0163	0,0408	0,0672	0,0486	0,0294	0,0845
MAE	0,1263	0,1266	0,1554	0,1524	0,1551	0,1535	0,2282	0,2221
RMSE	0,1589	0,1633	0,2077	0,2107	0,1996	0,1932	0,3027	0,3213
MAPE	0,4919	0,4687	0,4077	0,3767	0,3367	0,3476	0,4997	0,3904
AMAPE	0,1932	0,1927	0,1749	0,1707	0,1674	0,1653	0,2046	0,1941
TIC	0,2184	0,2293	0,2286	0,2382	0,2170	0,2063	0,2467	0,2718
LLF	0,2459	0,2423	0,2047	0,2000	0,1694	0,1599	0,2557	0,2600

Ilustracje 11.14–11.17 umożliwiają porównanie prognoz zmienności uzyskanych za pomocą obu typów modeli, ze zmiennością zrealizowaną. Widać, że oba modele prognozują podobnie. Zwykle prognozy z modelu ST-GARCH są nieco wyższe.

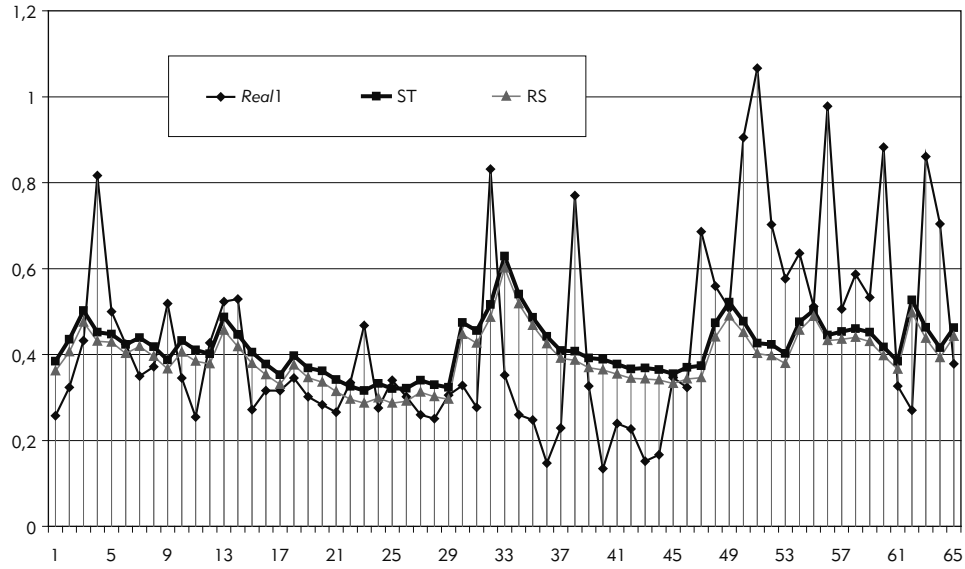
Uzyskane wyniki sugerują, że dynamika rozważanych kursów walutowych jest stosunkowo jednorodna. Występują wyraźne pojedyncze zmiany reżimu zmienności, przy tym efekt przełączenia nie jest związany z uwolnieniem kursu złotego, a raczej z rozszerzaniem pasma wahań kursu i ogólną sytuacją gospodarczą. Po najwyraźniejszej zmianie dynamiki (wzrost zmienności) modele RS-GARCH wychwytują jeszcze krótkotrwałe powroty do reżimu niskiej zmienności. Ze względu na swoją konstrukcję modele ST-GARCH nie mogą opisać tego zjawiska. Jednak pomimo tej różnicy jakość prognoz uzyskiwanych za pomocą obu typów modeli jest porównywalna.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 11.14. EUR/PLN. Porównanie ze zmiennością zrealizowaną prognoz zmienności z modeli ST-GARCH i RS-GARCH

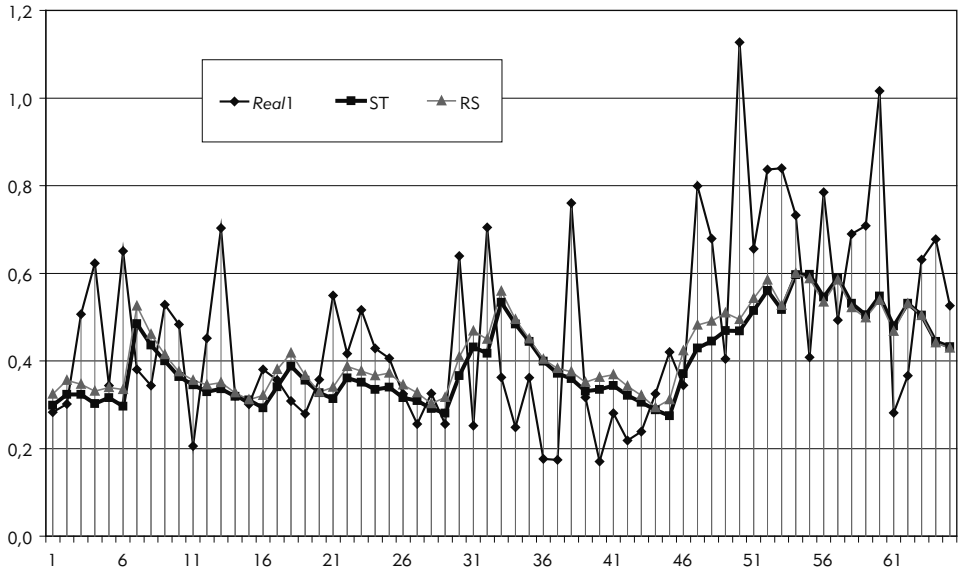


Ilustracja 11.15. GBP/PLN. Porównanie ze zmiennością zrealizowaną prognoz zmienności z modeli ST-GARCH i RS-GARCH

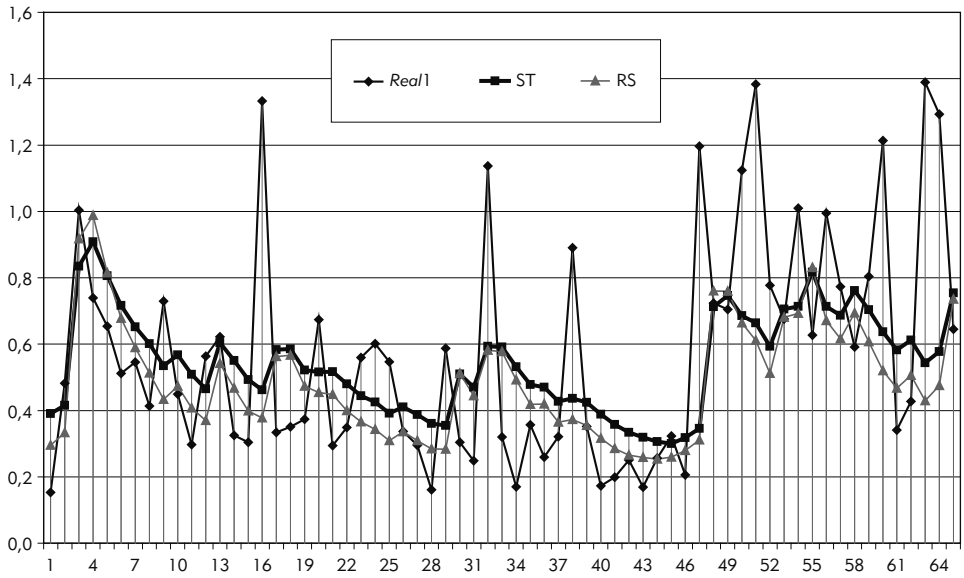


Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 11.16. NOK/PLN. Porównanie ze zmiennością zrealizowaną prognoz zmienności z modeli ST-GARCH i RS-GARCH



Ilustracja 11.17. USD/PLN. Porównanie ze zmiennością zrealizowaną prognoz zmienności z modeli ST-GARCH i RS-GARCH



Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

11.6. Uwagi

O modelach TAR można przeczytać na przykład w książkach Osińskiej (2006) oraz Fransesa i van Dijka (2000). Trochę na temat modeli wygładzonego przejścia piszą Tsay (2005) oraz Franses i van Dijk (2000). Oryginalna praca Lundbergha i Terasvirty (2000) jest napisana przystępnie i również może być dobrym źródłem informacji.

Podstawowe wiadomości na temat łańcuchów Markowa można znaleźć w książce Jakubowskiego i Sztencla (2001), ale też w książce Fellera (1977). Modelom przełącznikowym w ujęciu przestrzeni stanów poświęcona jest książka Kima i Nelsona (1999).

Zwracamy uwagę, że dla modeli z przełączaniem typu Markowa w ogólnym przypadku $\hat{\sigma}_t^2 \neq \mathrm{var}(r_t \mid \mathcal{F}_{t-1})$ oraz $\hat{\sigma}_T^2(l) \neq \mathrm{var}(r_{t+l} \mid \mathcal{F}_T)$ (Davidson 2004a).

Jak już wspomnieliśmy wcześniej, estymacja modeli przełącznikowych nastręcza wiele trudności ze względu na liczne maksima lokalne logarytmicznej funkcji wiarygodności. Istnieją dwa główne sposoby zmierzenia się z tym problemem. Pierwszy polega na wielokrotnym powtarzaniu obliczeń przy różnych wartościach początkowych. Często startuje się z punktów gęstej kraty. Drugim sposobem jest wykorzystanie algorytmów losowych do wyboru punktów startowych. Część pakietów obliczeniowych zawiera na przykład algorytm symulowanego wyżarzania (*Simulated Annealing*), który jest uważany za skuteczne narzędzie w tego typu sytuacjach.

sposoby niwelowania trudności związanych z estymacją modeli przełącznikowych

Wyniki dotyczące zastosowania modeli przełącznikowych na polskim rynku finansowym zostały m.in. przedstawione w pracach (Doman R. 2004, 2005, 2005a, Doman i Doman 2004, 2006, 2007a, Doman M. 2007, Kośko 2005).

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

12

Modelowanie dynamiki zależności warunkowych

Dotychczas rozważaliśmy tylko jednowymiarowe modele zmienności, które pozwalały nam opisywać, w jaki sposób informacje napływające w czasie na rynek finansowy oddziałują na dynamikę pojedynczych instrumentów finansowych, przejawiającą się w zmienności ich cen. Jednak informacje, czy to o zmianach cen instrumentów, czy też inne o istotnym znaczeniu nie wpływają na proces ceny poszczególnych instrumentów oddzielnie, a wręcz przeciwnie, często zachodzą silne związki między reakcjami różnych instrumentów na tę samą informację. W związku z tym wydaje się rzeczą zupełnie oczywistą, że będące skutkiem bombardowania rynku napływającymi informacjami zależności między zwrotami z poszczególnych instrumentów finansowych same mogą ewoluować w czasie oraz że warto tę ewolucję modelować i prognozować.

Poszukiwanie wiarygodnych oszacowań kowariancji pomiędzy zmiennymi finansowymi jest nie tylko tematem ogromnej liczby artykułów naukowych, ale również stanowi przedmiot zainteresowania praktyków działających na rynku finansowym. Znajomość takich kowariancji potrzebna jest w wycenie instrumentów pochodnych, przy optymalizacji portfela, a także w celu zabezpieczania się przed ryzykiem. Tradycyjnie rozważa się kowariancje bezwarunkowe, co jest ujęciem statycznym. Przy podejściu dynamicznym wielowymiarowe modele GARCH (*Multivariate GARCH*, M-GARCH), którym poświęcony jest ten rozdział, mogą być wykorzystane do modelowania zmieniającego się w czasie zachowania kowariancji warunkowych analizowanych portfeli. W praktyce finansowej najbardziej rozpowszechnione jest stosowanie ekstrapolacji kowariancji historycznych oraz wygładzanie wykładnicze. Przy bardziej zaawansowanym podejściu zmieniające się w czasie kowariancje są, jak wspomnieliśmy, estymowane za pomocą wielowymiarowych modeli GARCH.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

12.1. Ogólny wielowymiarowy model zmienności

Rozważmy wielowymiarowy szereg zwrotów $\mathbf{r}_t = (r_{1,t}, \ldots, r_{k,t})'$. Podobnie jak w przypadku jednowymiarowym, r_t możemy przedstawić w postaci dekompozycji:

$$\mathbf{r}_t = \boldsymbol{\mu}_t + \mathbf{y}_t \tag{12.1}$$

gdzie $\boldsymbol{\mu}_t = E(\mathbf{r}_t \mid \mathcal{F}_{t-1})$ jest warunkową wartością oczekiwaną wektora r_t pod warunkiem zbioru informacji $\mathcal{F}_{t-1}$, dostępnych do momentu $t - 1$ włącznie, a $\mathbf{y}_t = (y_{1,t}, \ldots, y_{k,t})'$.

Ogólny k-wymiarowy model GARCH dla procesu $\mathbf{y}_t$ jest dany przez równanie:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{H}_t^{1/2}\boldsymbol{\varepsilon}_t, \tag{12.2}$$

gdzie $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ jest k-wymiarowym procesem niezależnych zmiennych losowych o zerowej średniej i identycznościowej macierzy kowariancji: $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim \text{iid}(\mathbf{0},\mathbf{I}_k)$, a $\mathbf{H}_t^{1/2}$ jest taką macierzą dodatnio określoną, że $\mathbf{H}_t^{1/2}(\mathbf{H}_t^{1/2})' = \mathbf{H}_t$.

W szczególności $\mathbf{H}_t^{1/2}$ może być symetrycznym pierwiastkiem kwadratowym macierzy $\mathbf{H}_t$ otrzymanym za pomocą diagonalizacji i pierwiastkowania wyrazów na przekątnej lub macierzą otrzymaną za pomocą faktoryzacji Cholesky'ego (zob. Tsay 2005). Zatem:

$$E(\mathbf{y}_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbf{0} \tag{12.3a}$$

$$E(\mathbf{y}_t \mathbf{y}_t' \mid \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbf{H}_t \tag{12.3b}$$

Konkretny wielowymiarowy model GARCH jest określony przez specyfikację parametryzacji macierzy kowariancji warunkowej $\mathbf{H}_t$. W literaturze przedmiotu znane są rozmaite takie parametryzacje różniące się pod wieloma względami. Jednym z aspektów zróżnicowania jest ogólność specyfikacji. Jeżeli liczba k łącznie modelowanych szeregów jest większa niż 4, to pewne modele stają się bezwartościowe ze względu na trudności związane z estymacją parametrów, ponieważ parametrów tych bywa kilkaset. Zaproponowane zostały również modele charakteryzujące się sporym stopniem ogólności, a jednocześnie mające mniej parametrów.

Inny problem dotyczący wyboru parametryzacji wiąże się z tym, że z definicji macierz $\mathbf{H}_t$ jest dodatnio określona, ale w pewnych modelach mogą wystąpić trudności z bezpośrednim sformułowaniem warunków, jakie powinny spełniać parametry modelu, aby ta dodatnia określoność była faktycznie zachowana.

Wprowadźmy jeszcze kilka pojęć, które okażą się przydatne dla rozważań prowadzonych w tym rozdziale.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Dla macierzy kwadratowej $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n\times m}$ zdefiniujmy wektor:

operatory vec i vech

$$\text{vec}(\mathbf{A}) = (a_{11}, \ldots, a_{n1}, a_{12}, \ldots, a_{n2}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{nm})'$$

Zatem operator vec przyporządkowuje macierzy wektor kolumnowy powstały przez wypisanie w ciągu elementów jej kolejnych kolumn.

Niech z kolei vech oznacza operator przyporządkowujący danej macierzy wymiaru (n,n) wektor kolumnowy wymiaru $\frac{1}{2}n(n+1)$ zestawiony z elementów jej kolejnych kolumn, które leżą na i poniżej głównej przekątnej. Na przykład:

$$\text{vech}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}\right) = [1,\ 4,\ 7,\ 5,\ 8,\ 9]'$$

Iloczyn Kroneckera macierzy $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n\times m}$ oraz $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{p\times q}$ określony jest następująco:

$$\mathbf{A}\otimes\mathbf{C} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{C} & \cdots & a_{1n}\mathbf{C} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{C} & \cdots & a_{mn}\mathbf{C} \end{bmatrix}_{mp\times nq}$$

12.2. Zależności liniowe w szeregach wielowymiarowych

Podobnie jak w wypadku jednowymiarowych modeli zmienności częścią procedury estymacyjnej dla modeli M-GARCH jest oszacowanie średniej warunkowej. Zwykle stosuje się w tym celu modele wektorowej autoregresji, które pokrótce przedstawimy w niniejszym podrozdziale.

Rozważmy wielowymiarowy szereg zwrotów $\mathbf{r}_t = (r_{1,t}, \ldots, r_{k,t})'$. Podobnie jak w wypadku szeregu jednowymiarowego mówimy, że jest on kowariancyjnie stacjonarny, jeśli jego momenty pierwszego i drugiego rzędu są niezmiennicze w czasie, w szczególności stałe w czasie są średnia $\boldsymbol{\mu} = E(\mathbf{r}_t)$ oraz macierz kowariancji $\boldsymbol{\Gamma}_0 = \text{E}\,[(\mathbf{r}_t - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{r}_t - \boldsymbol{\mu})'] = [\Gamma_{ij}(0)]$

kowariancyjnie stacjonarny szereg wielowymiarowy

Niech K oznacza macierz diagonalną stopnia k w postaci:

$$\mathbf{K} = \text{diag}\{\sqrt{\Gamma_{11}(0)}, \ldots \sqrt{\Gamma_{kk}(0)}\}.$$

Macierz korelacji krzyżowych z opóźnieniem l ma postać:

$$\boldsymbol{\rho}_l = [\rho_{ij}(l)] = \mathbf{K}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}_l\mathbf{K}^{-1},$$

gdzie $\rho_{ij}(l)$ oznacza współczynnik korelacji pomiędzy zmiennymi $r_{i,t}$ i $r_{j,t-l}$

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Macierz korelacji krzyżowych z próby jest zdefiniowana jako:

$$\hat{\boldsymbol{\rho}}_l = \hat{\mathbf{K}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_l\hat{\mathbf{K}}^{-1}$$

gdzie $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_l = \frac{1}{T}\sum_{t=l+1}^{T}(\mathbf{r}_t - \bar{\mathbf{r}})(\mathbf{r}_{t-l} - \bar{\mathbf{r}})'$ $(l \geq 0,\ \bar{\mathbf{r}} = (1/T)\sum_{t=1}^{T}\mathbf{r}_t)$ jest macierzą kowariancji z próby liczącej T obserwacji.

12.2.1. Uogólnienia testu Ljunga–Boxa na przypadek wielowymiarowy

Testowanie zależności liniowych w wielowymiarowych szeregach czasowych obejmuje testowanie autokorelacji w poszczególnych szeregach jednowymiarowych oraz korelacji krzyżowych pomiędzy tymi szeregami. Poniżej przedstawiamy dwa uogólnienia testu Junga–Boxa na przypadek wielowymiarowy.

12.2.1.1. Test Hoskinga

test Hoskinga; hipoteza zerowa: brak zależności liniowych

Hipoteza zerowa testu ma postać H_0: $\boldsymbol{\rho}_1 = \ldots \boldsymbol{\rho}_m = \mathbf{0}$, przeciw alternatywie H_a: $\boldsymbol{\rho}_i \neq \mathbf{0}$ dla pewnego i.

Statystyką testową jest:

$$Q_k(m) = T^2\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{T-l}\,\mathrm{tr}(\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_l\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_0^{-1}\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_l\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_0^{-1}) \tag{12.4}$$

gdzie T jest liczebnością próby, a k wymiarem wektora, tr($\mathbf{A}$) oznacza ślad macierzy $\mathbf{A}$.

Przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej statystyka $Q_k(m)$ ma asymptotycznie rozkład $\chi^2(k^2m)$.

12.2.1.2. Test Li i McLeoda

test Li i McLeoda; hipoteza zerowa: brak zależności liniowych

Wykorzystując pojęcia przedstawione na końcu podrozdziału 12.1, statystykę testu Hoskinga można zapisać w postaci:

$$Q_k(m) = T^2\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{T-l}\,\mathbf{b}_l'(\hat{\boldsymbol{\rho}}_0^{-1}\otimes\hat{\boldsymbol{\rho}}_0^{-1})\mathbf{b}_l \tag{12.5}$$

gdzie $\mathbf{b}_l = \mathrm{vec}(\hat{\boldsymbol{\rho}}_l')$.

Stanowiąca modyfikację statystyki (12.5) statystyka Li i McLeoda (1981) dana jest wzorem:

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

$$Q_k^*(m) = T\sum_{l=1}^{m} \mathbf{b}_l'(\hat{\boldsymbol{\rho}}_0^{-1} \otimes \hat{\boldsymbol{\rho}}_0^{-1})\mathbf{b}_l + \frac{k^2 m(m+1)}{2T} \tag{12.6}$$

Statystyka $Q^*_k(m)$ jest asymptotycznie równoważna statystyce $Q_k(m)$.

12.2.2. Model wektorowej autoregresji

Omówimy teraz krótko modele wektorowej autoregresji (VAR), które w dalszej części rozdziału będą wykorzystywane do specyfikacji średniej warunkowej wektora stóp zwrotu.

proces VAR(1)

Wielowymiarowy szereg czasowy jest procesem VAR(1), jeśli można go opisać za pomocą modelu:

$$\mathbf{r}_t = \boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{\Phi}_1 \mathbf{r}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \tag{12.7}$$

gdzie $\boldsymbol{\varphi}_0$ jest k-wymiarowym wektorem, $\boldsymbol{\Phi}_1$ – macierzą o wymiarach $k \times k$, a $\{\boldsymbol{\varepsilon}_t\}$ jest ciągiem szeregowo nieskorelowanych wektorów losowych o zerowej średniej i macierzy kowariancji $\boldsymbol{\Sigma}$.

W przypadku dwuwymiarowym mamy:

$$r_{1t} = \phi_{10} + \Phi_{11} r_{1t-1} + \Phi_{12} r_{2t-1} + \varepsilon_{1t}$$

$$r_{2t} = \phi_{20} + \Phi_{21} r_{1t-1} + \Phi_{22} r_{2t-1} + \varepsilon_{2t}$$

Warunki kowariancyjnej stacjonarności i inne własności modelu VAR(1) można wyprowadzić w podobny sposób, jak w przypadku jednowymiarowym (zob. rozdz. 2). Model (12.7) jest kowariancyjnie stacjonarny, jeśli wszystkie pierwiastki równania $\det(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Phi}_1 L) = 0$ mają moduły większe od 1.

Model VAR(p) określony jest równaniem:

$$\mathbf{r}_t = \boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{\Phi}_1 \mathbf{r}_{t-1} + \ldots + \boldsymbol{\Phi}_p \mathbf{r}_{t-p} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \tag{12.8}$$

lub równoważnie:

$$\boldsymbol{\Phi}(L)\mathbf{r}_t = \boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_t \tag{12.9}$$

gdzie: $\boldsymbol{\Phi}(L) \equiv \mathbf{I} - \boldsymbol{\Phi}_1 L - \ldots - \boldsymbol{\Phi}_p L^p$.

Jest on stacjonarny, jeśli wszystkie pierwiastki równania $\det(\boldsymbol{\Phi}(L)) = 0$ mają moduły większe od 1.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

12.3. Model VEC

Większość specyfikacji wielowymiarowych modeli GARCH jest sformułowana tak, że wariancje i kowariancje są funkcjami liniowymi kwadratów i iloczynów krzyżowych rozważanych obserwacji. Najbardziej ogólnym modelem w tej grupie jest model VEC sformułowany przez Engle'a i Kronera (1995). Model VEC(p,q) określony jest równaniem:

model VEC

$$\mathbf{h}_t = \mathbf{c} + \sum_{j=1}^{q} \mathbf{A}_j \boldsymbol{\eta}_{t-j} + \sum_{j=1}^{p} \mathbf{G}_j \mathbf{h}_{t-j} \tag{12.10}$$

gdzie:

$$\mathbf{h}_t = \text{vech}(\mathbf{H}_t) \tag{12.11}$$

$$\boldsymbol{\eta}_t = \text{vech}(\mathbf{y}_t \mathbf{y}_t') \tag{12.12}$$

W powyższych równaniach $\mathbf{A}_j$ i $\mathbf{G}_j$ są kwadratowymi macierzami parametrów, stopnia $\frac{1}{2}k(k+1)$, natomiast $\mathbf{c}$ jest wektorem parametrów wymiaru $\frac{1}{2}k(k+1)$. W najprostszym nietrywialnym przypadku model ten zawiera 21 parametrów, a dla $k = 4$ oraz $(p,q) = (1,1)$ liczba parametrów wynosi 210. Bez dodatkowych założeń, model VEC nie gwarantuje dodatniej określoności macierzy $\mathbf{H}_t$. Warunki dostateczne podane zostały przez Gourieroux (1997).

Mniejszą liczbą parametrów charakteryzuje się model Bollersleva, Engle'a i Wooldridge'a (1988), tak zwany diagonalny VEC (DVEC), w którym macierze $\mathbf{A}_j$ i $\mathbf{G}_j$ z założenia są diagonalne. W literaturze (Attanasio 1991) można znaleźć warunki gwarantujące dodatnią określoność macierzy $\mathbf{H}_t$ dla tego modelu.

12.4. Model BEKK

Engle i Kroner (1995) zaproponowali parametryzację modelu, z postaci której bezpośrednio wynika dodatnia określoność macierzy $\mathbf{H}_t$. Odpowiedni model nosi nazwę BEKK od nazwisk: Baba, Engle, Kraft, Kroner (Baba i in. 1991). Model BEKK(p,q,K) zdefiniowany jest za pomocą równania:

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{C}'\mathbf{C} + \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{q} \mathbf{A}_{ji}' \mathbf{y}_{t-j} \mathbf{y}_{t-j}' \mathbf{A}_{ji} + \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{p} \mathbf{G}_{ji} \mathbf{H}_{t-j} \mathbf{G}_{ji}' \tag{12.13}$$

gdzie $\mathbf{C}$, $\mathbf{A}_{ji}$, $\mathbf{G}_{ji}$ są macierzami wymiaru $k \times k$, przy czym $\mathbf{C}$ jest macierzą górną trójkątną. Engle i Kroner (1995) wykazali, że model BEKK może być traktowany jako szczególny przypadek modelu VEC.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

W najprostszym przypadku modelu BEKK(1,1,1) liczba parametrów ARCH i GARCH wynosi $\frac{k(5k+1)}{2}$.

kompromis pomiędzy dokładnością opisu a liczbą parametrów

W celu zmniejszenia liczby szacowanych parametrów rozważa się dwie uproszczone wersje tego modelu:

1) diagonalny model BEKK (Diag-BEKK), w którym przyjmuje się, że macierze $\mathbf{A}_{ji}$ oraz $\mathbf{G}_{ji}$ są diagonalne;
2) skalarny model BEKK (Scalar-BEKK), w którym wszystkie elementy macierzy $\mathbf{A}_{ji}$ są sobie równe i taki sam warunek spełnia macierz $\mathbf{G}_{ji}$.

12.5. Model stałych korelacji warunkowych

model CCC

W 1990 roku Bollerslev przedstawił klasę wielowymiarowych modeli GARCH, nazwanych modelami stałych korelacji warunkowych (*Constant Conditional Correlation* – CCC). W modelach tych zakłada się, że korelacje warunkowe są stałe, a zatem kowariancje warunkowe są proporcjonalne do iloczynów warunkowych odchyleń standardowych (Bollerslev 1990). Taka specyfikacja radykalnie redukuje liczbę parametrów i w konsekwencji upraszcza estymację. Model CCC ma postać:

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{R} \mathbf{D}_t = \left(\rho_{ij} \sqrt{h_{ii,t} h_{jj,t}} \right) \tag{12.14}$$

gdzie:

$$\mathbf{D}_t = \operatorname{diag}\left(\sqrt{h_{11,t}}, \ldots, \sqrt{h_{kk,t}} \right) \tag{12.15}$$

przy czym $\mathbf{R}$ jest dodatnio określoną macierzą symetryczną z jedynkami na głównej przekątnej, a $h_{ii,t}$ może być modelowane jako wariancja warunkowa w dowolnym jednowymiarowym modelu GARCH, na przykład:

$$h_{ii,t} = \omega_{i,t} + \sum_{j=1}^{q} \alpha_{ij} y_{i,t-j}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_{ij} h_{ii,t-j} \tag{12.16}$$

gdzie $i = 1, \ldots, k$.

Dodatnia określoność macierzy $\mathbf{H}_t$ jest zagwarantowana przez dodatniość jednowymiarowych wariancji warunkowych $h_{ii,t}$ oraz dodatnią określoność macierzy $\mathbf{R}$. Bezwarunkowe wariancje w modelu CCC można wyliczyć, przy założeniu kowariancyjnej stacjonarności szeregów składowych, tak jak w modelu jednowymiarowym. Jednak wyznaczenie bezwarunkowych kowariancji nie jest sprawą łatwą z powodu nieliniowych zależności występujących w równaniu (12.14).

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

12.6. Modele dynamicznych korelacji warunkowych

Założenie, że korelacje warunkowe nie zmieniają się w czasie nie jest realistyczne z punktu widzenia wielu zastosowań praktycznych. Skłoniło to Engle'a do zaproponowania w 2002 roku modelu dynamicznych korelacji warunkowych DCC (*Dynamic Conditional Correlation*) ze zmieniającymi się w czasie korelacjami warunkowymi (Engle 2004). Modele te wykazują elastyczność jednowymiarowych modeli GARCH, a jednocześnie należą do oszczędnych modeli parametrycznych opisujących korelacje warunkowe bezpośrednio. Nie są one liniowe, ale mogą być łatwo estymowane przy użyciu metody dwustopniowej: najpierw estymuje się jednowymiarowe modele GARCH, a następnie korelacje. W pracy Engle'a (2004), a także Engle'a i Shepparda (2001) wykazano, że modele DCC wypadają dobrze w rozmaitych sytuacjach i dają sensowne wyniki empiryczne.

model DCC

Specyfikacja przedstawionego przez Engle'a modelu DCC jest następująca:

$$\mathbf{y}_t \mid \mathcal{F}_{t-1} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{H}_t) \tag{12.17}$$

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{R}_t \mathbf{D}_t \tag{12.18}$$

gdzie $\mathbf{D}_t$ jest określona, tak jak w (12.15), a $h_{ii,t}$ może być modelowane za pomocą dowolnego jednowymiarowego modelu GARCH, np. (12.16).
Natomiast:

$$\mathbf{R}_t = (\text{diag}(\mathbf{Q}_t))^{-1/2}\, \mathbf{Q}_t\, (\text{diag}(\mathbf{Q}_t))^{-1/2} \tag{12.19}$$

przy czym dodatnio określona macierz symetryczna $\mathbf{Q}_t$ stopnia k jest dana przez równanie:

$$\mathbf{Q}_t = \left(1 - \sum_{m=1}^{M} \alpha_m - \sum_{n=1}^{N} \beta_n\right) \bar{\mathbf{Q}} + \sum_{m=1}^{M} \alpha_m \mathbf{u}_{t-m} \mathbf{u}'_{t-m} + \sum_{n=1}^{N} \beta_n \mathbf{Q}_{t-n} \tag{12.20}$$

Występujące w równaniu (12.20) wektory k-wymiarowe $\mathbf{u}_t$ mają współrzędne $u_{i,t} = y_{i,t} \Big/ \sqrt{h_{ii,t}}$. Macierz kwadratowa, $\bar{\mathbf{Q}}$ stopnia k, jest tutaj bezwarunkową macierzą kowariancji zmiennych $\mathbf{u}_t$. Ponadto zakłada się, że parametry skalarne α_m i β_n są nieujemne i spełniają nierówność: $\sum_{m=1}^{M} \alpha_m + \sum_{n=1}^{N} \beta_n < 1$.

Pewną słabością określonego wyżej modelu DCC jest to, że parametry α_m i β_n są skalarami, co oznacza, że wszystkie korelacje podlegają tej samej dynamice. Podobna uwaga odnosi się również do alternatywnego, w stosunku do opisanego tu modelu Engle'a, modelu dynamicznych korelacji warunkowych zdefiniowanego w pracy Tse i Tsui (2002).

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Jak już wspominaliśmy, modele DCC mogą być zgodnie estymowane za pomocą procedury dwustopniowej. W pierwszym etapie dla każdego szeregu $y_{i,t}$, $i = 1, \ldots, k$, estymowane są jednowymiarowe modele GARCH.

W drugim etapie reszty standaryzowane za pomocą odchyleń standardowych wyestymowanych w etapie pierwszym są używane do estymacji parametrów dynamicznych korelacji. Funkcja quasi-wiarygodności używana w pierwszym etapie ma postać:

$$QL_1(\boldsymbol{\varphi} \mid \mathbf{y}_t) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\left(T\ln(2\pi) + \sum_{t=1}^{T}\left(\ln(h_{ii,t}) + \frac{y_{i,t}^2}{h_{ii,t}}\right)\right) \tag{12.21}$$

i jest po prostu sumą funkcji wiarygodności rozważanych k modeli jednowymiarowych.

Przy danym wektorze parametrów $\boldsymbol{\varphi}$ zgodny estymator wektora parametrów $\boldsymbol{\psi}$ zawierającego parametry korelacyjne może być wyznaczony za pomocą funkcji wiarygodności:

$$QL_2(\boldsymbol{\psi} \mid \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{y}_t) = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left(\ln \mid \mathbf{R}_t \mid + \mathbf{u}_t' \mathbf{R}_t^{-1} \mathbf{u}_t\right) \tag{12.22}$$

gdzie $\mathbf{u}_t = \mathbf{D}_t^{-1}\mathbf{y}_t$.

Przyjęte przez Engle'a (2002) założenie (12.17) o normalności wielowymiarowych rozkładów warunkowych nie jest zbyt realistyczne w wypadku modelowania zależności warunkowych pomiędzy dziennymi zwrotami z instrumentów finansowych. Jednym z powodów tego stanu jest, potwierdzana w analizie empirycznej takich szeregów, wartość kurtozy rozkładów warunkowych znacznie wyższa niż odpowiadająca rozkładowi normalnemu. Ten mankament standardowego modelu DCC można usunąć, zachowując jednocześnie jego wymienione zalety, przez rozszerzenie dopuszczalnej klasy rozkładów innowacji do klasy rozkładów eliptycznych, która oprócz rozkładów normalnych zawiera również rozkłady leptokurtyczne, na przykład wielowymiarowe rozkłady t Studenta. Propozycja takiego rozszerzenia klasy modeli DCC została przedstawiona w pracy Pelagattiego i Rondeny (2004).

rozkłady eliptyczne

Wektor losowy $\mathbf{X}$ wymiaru k ma rozkład eliptyczny, $\mathbf{X} \sim EC_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \phi)$, jeśli jego funkcja charakterystyczna (Jakubowski i Sztencel 2001) może być przedstawiona w postaci:

$$E(\exp(i\mathbf{t}'\mathbf{X}) = \exp(i\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu})\phi(\mathbf{t}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t}) \tag{12.23}$$

gdzie $\boldsymbol{\mu}$ jest k-wymiarowym wektorem, $\boldsymbol{\Sigma}$ jest symetryczną dodatnio określoną macierzą wymiaru $k \times k$, a ϕ jest funkcją skalarną zwaną generatorem charakterystycznym.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Własności rozkładów eliptycznych omówione są, na przykład, w książce Fanga i in. (1990). Do najistotniejszych, z punktu widzenia przedstawianych zastosowań, należą następujące właściwości.

- Liniowa kombinacja współrzędnych losowego wektora eliptycznego $\mathbf{X}$ jest zmienną o rozkładzie eliptycznym i ma ten sam generator. W szczególności jednowymiarowe rozkłady brzegowe wektora $\mathbf{X}$ są eliptyczne o tym samym generatorze.
- Jeśli $\mathbf{X} \sim EC_k(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma},\phi)$ ma gęstość, to gęstość ta może być przedstawiona w postaci:

$$f(\mathbf{x}) = c\,|\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}}\, g\Big((\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\,\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\Big) \tag{12.24}$$

  gdzie g jest funkcją skalarną zwaną generatorem gęstości.
  W takiej sytuacji stosuje się zapis $\mathbf{X} \sim EC_k(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma},g)$.
- Jeśli $\mathbf{X} \sim EC_k(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma},g)$ ma momenty rzędu $m \geq 2$, to $E(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\mu}$ oraz $\mathrm{cov}(\mathbf{X}) = \gamma\boldsymbol{\Sigma}$, gdzie $\gamma = -2\phi'(0)$, przy czym możliwe jest takie przeskalowanie, że $\mathrm{cov}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\Sigma}$, co będziemy zakładać dalej.
- Do klasy rozkładów eliptycznych należą między innymi rozkłady wielowymiarowe: normalny, t Studenta i Laplace'a.

W eliptycznym modelu DCC zamiast warunku (12.17) przyjmuje się, że:

$$\mathbf{y}_t \mid \mathcal{F}_{t-1} \sim EC_k(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_t, g) \tag{12.25}$$

Funkcja wiarygodności w drugim etapie estymacji ma, zamiast postaci (12.22), postać:

$$L_2(\boldsymbol{\psi} \mid \boldsymbol{\varphi}) = \sum_{t=1}^{T}\Big(\ln c - \tfrac{1}{2}\ln|\mathbf{R}_t| + \ln g(\mathbf{u}_t'\mathbf{R}_t^{-1}\mathbf{u}_t)\Big) \tag{12.26}$$

gdzie $\boldsymbol{\Sigma}_t = \mathbf{D}_t\mathbf{R}_t\mathbf{D}_t$.

Niewątpliwie prostsze w estymacji modele DCC stanowią konkurencję dla bardziej złożonych modeli BEKK. Podstawowa różnica między nimi sprowadza się do tego, że używając modeli BEKK, estymujemy dynamiczne kowariancje, a następnie, korzystając z tego, możemy wyznaczyć dynamiczne korelacje. W wypadku modeli DCC jest odwrotnie: wykorzystując dynamiczne korelacje i wyestymowane z jednowymiarowych modeli GARCH wariancje warunkowe, możemy wyznaczyć dynamiczne kowariancje. W związku z tym nasuwają się naturalne pytania, czy dynamika korelacji (lub kowariancji) otrzymana za pomocą tych różniących się podejść jest taka sama czy różna, a jeśli są różne dynamiki, to która lepiej opisuje zależności interesujące badacza czy inwestora. Próby odpowiedzi na te pytania są związane nie tylko z teoretyczną analizą modeli, ale również z badaniami empirycznymi.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

12.7. Modele O-GARCH i GO-GARCH

Problemy związane z szacowaniem dużej liczby parametrów wielowymiarowych modeli GARCH stają się szczególnie istotne, gdy – jak to często bywa w praktyce – należy oszacować macierze warunkowych kowariancji dla portfela składającego się kilkudziesięciu, a nawet kilkuset instrumentów. Efektem prób obejścia tych trudności są modele opisane w tym podrozdziale: ortogonalny GARCH (O-GARCH) (Kariya 1988, Alexander i Chibumba 1997, Alexander 2001) oraz uogólniony O-GARCH (GO-GARCH) (van der Weide 2002).

Ogólnie mówiąc, konstrukcja modeli ortogonalnych opiera się na założeniu, że uzyskane obserwacje są generowane przez zmienne losowe stanowiące kombinacje liniowe pewnego zbioru nieskorelowanych zmiennych, które są wybierane jako główne składowe (Bauwens i in. 2006). W modelu O-GARCH macierz transformacji liniowej (jednego zbioru danych na drugi) musi być ortogonalna. W wersji uogólnionej wystarczy jej odwracalność.

W modelu O-GARCH $(k \times k)$-wymiarowe macierze kowariancji warunkowych $\mathbf{H}_t$ dla wektorów $\mathbf{y}_t$ z równania (12.1) są generowane za pomocą m jednowymiarowych modeli GARCH, gdzie $m \leq k$ jest liczbą składowych głównych wyznaczonych w wyniku zastosowania metody analizy składowych głównych (Tsay 2005).

Dla wyrobienia intuicji rozważmy najpierw przypadek, gdy $m = k$. Procedura zaczyna się od wyznaczenia wartości własnych i wektorów własnych macierzy korelacji z próby $\mathbf{R}$, wyznaczonej dla standaryzowanych zwrotów jednowymiarowych $v_{i,t}$.

Przyjmując, że $\mathbf{L} = \text{diag}(l_i)$, gdzie l_i są wartościami własnymi uporządkowanymi malejąco, i oznaczając przez $\mathbf{P}$ macierz ortogonalną utworzoną z odpowiadających im wektorów własnych, można napisać $\mathbf{R} = \mathbf{P}\mathbf{L}^{1/2}\mathbf{L}^{1/2}\mathbf{P}' = \mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}'$. Niech $\mathbf{f}_t = \mathbf{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{v}_t$, gdzie $\boldsymbol{v}_t = (v_1, \ldots, v_k)'$. Wektor $\mathbf{f}_t$ jest wektorem składowych głównych, a więc jego bezwarunkową macierzą kowariancji jest macierz identycznościowa. Za warunkową macierz kowariancji wektora $\mathbf{f}_t$ przyjmujemy diagonalną macierz $\mathbf{Q}_t$, w której elementami na przekątnej są wariancje warunkowe wyliczone za pomocą jednowymiarowych modeli typu GARCH. W konsekwencji macierz kowariancji warunkowych zwrotu standaryzowanego $\boldsymbol{v}_t$ jest równa $\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}_t\mathbf{\Lambda}'$ i możemy ją przetransformować w macierz kowariancji warunkowych zwrotów niestandaryzowanych.

W praktyce nie wykorzystuje się wszystkich składowych głównych, a tylko $m < k$ pierwszych, które wyjaśniają większość zmienności danych. Oczywiście zmieniają się wtedy wymiary odpowiednich macierzy.

redukcja wymiaru portfela

Na tym polega rzeczywiste znaczenie modelu. Zamiast rozważać wszystkie składniki portfela, prowadzi się analizę wybranych (abstrakcyjnych) czynników ryzyka (składowych głównych). To znacznie redukuje wymiar portfela.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ostatecznie równanie dynamiki macierzy kowariancji w modelu O-GARCH jest następujące:

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{V}^{1/2}\mathbf{V}_t\mathbf{V}^{1/2} \tag{12.27}$$

gdzie $\mathbf{V}$ jest macierzą diagonalną z wariancjami z próby zmiennych y_{it} na głównej przekątnej, a:

$$\mathbf{V}_t = \text{var}(\mathbf{v}_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbf{\Lambda}_m\mathbf{Q}_t\mathbf{\Lambda}'_m \tag{12.28}$$

przy czym $\mathbf{\Lambda}_m$ jest znaną macierzą o wymiarach $k \times m$, daną wzorem:

$$\mathbf{\Lambda}_m = \mathbf{P}_m \,\text{diag}(l_1^{1/2}, \ldots, l_m^{1/2}) \tag{12.29}$$

gdzie $l_1 \geq \ldots \geq l_m > 0$ są największymi wartościami własnymi macierzy korelacji z próby dla $\mathbf{v}_t = \mathbf{V}^{-1/2}\mathbf{y}_t$, a $\mathbf{P}_m$ jest macierzą $k \times m$-wymiarową odpowiadających tym wartościom wektorów własnych (wzajemnie ortogonalnych).

Mamy ponadto:

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{\Lambda}_m\mathbf{f}_t \tag{12.30}$$

gdzie $\mathbf{f}_t = (f_{1t}, \ldots, f_{1t})'$ jest procesem losowym, takim że:

$$E(\mathbf{f}_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbf{0} \tag{12.31}$$

a macierz jego kowariancji warunkowych pod warunkiem zbioru informacji $\mathcal{F}_{t-1}$ jest macierzą diagonalną $\mathbf{Q}_t = \text{diag}(h(f_{1,t}), \ldots, h(f_{m,t}))$, dla której:

$$h(f_{i,t}) = (1 - \sum_{j=1}^{q}\alpha_{ij} - \sum_{j=1}^{p}\beta_{ij}) + \sum_{j=1}^{q}\alpha_{ij}f_{i,t-j}^2 + \sum_{j=1}^{p}\beta_{ij}h(f_{i,t-j})$$

gdzie $i = 1, \ldots, m$.

W modelu GO-GARCH (van der Weide 2002) założenie o ortogonalności macierzy $\mathbf{\Lambda}_m$ zostało zamienione na warunek, że jest to macierz kwadratowa odwracalna.

12.8. Test stałości korelacji

Testowanie hipotezy o stałości korelacji należy do problemów trudnych, między innymi z tego powodu, że możliwe jest jej odrzucenie w przypadku, gdy jest ona prawdziwa, z powodu niewłaściwej specyfikacji modeli zmienności dla szeregów składowych. Engle i Sheppard (2001) zaproponowali test ilorazu wiarygodności, w którym, przy oznaczeniach z podrozdziałów 12.1 i 12.6, hipotezą zerową jest:

test stałości korelacji

$$\text{H}_0\text{: } \mathbf{R}_t = \bar{\mathbf{R}}, \; t = 1, \ldots, \text{N}$$

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

a hipoteza alternatywna ma postać:

$$H_1: \text{vech}(\mathbf{R}_t) = \text{vech}(\bar{\mathbf{R}}) + \beta_1 \text{vech}(\mathbf{R}_{t-1}) + \ldots + \beta_p \text{vech}(\mathbf{R}_{t-p})$$

W pierwszym etapie procedury testującej estymuje się modele GARCH dla szeregów składowych, i standaryzuje się reszty za pomocą oszacowanych szeregów zmienności. Następnie estymuje się korelacje reszt standaryzowanych oraz standaryzuje się łącznie, za pomocą macierzy kwadratowej będącej pierwiastkiem otrzymanej macierzy korelacji $\bar{\mathbf{R}}$, wektor złożony z jednowymiarowych reszt standaryzowanych. Przy prawdziwej hipotezie zerowej o stałości korelacji wektory otrzymane z łącznego standaryzowania powinny tworzyć wektorowy ciąg iid.

Niech:

$$\mathbf{Y}_t = \text{vech}^u \left[(\bar{\mathbf{R}}^{-1/2} \mathbf{D}_t^{-1} \mathbf{y}_t)(\bar{\mathbf{R}}^{-1/2} \mathbf{D}_t^{-1} \mathbf{y}_t)' - \mathbf{I}_k \right]$$

W powyższym wzorze $\bar{\mathbf{R}}^{-1/2} \mathbf{D}_t^{-1} \mathbf{y}_t$ jest wektorem wymiaru $(k,1)$ reszt łącznie standaryzowanych przy prawdziwej hipotezie zerowej, a vech^u oznacza modyfikację operatora vech, w której używa się elementów leżących powyżej głównej przekątnej.

Rozważmy autoregresję wektorową:

$$\mathbf{Y}_t = \alpha + \beta_1 \mathbf{Y}_{t-1} + \ldots + \beta_s \mathbf{Y}_{t-s} + \boldsymbol{\eta}_t$$

Przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej stała α oraz parametry przy wektorach opóźnionych powinny być równe zeru. Jeśli przedstawimy powyższą autoregresję w postaci macierzowej:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\delta} + \mathbf{e}$$

to przy prawdziwej hipotezie zerowej statystyka:

$$\frac{\hat{\boldsymbol{\delta}}' \mathbf{X}' \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\delta}}}{\sigma_e^2}$$

ma asymptotycznie rozkład $\chi^2(s+1)$.

12.9. Od teorii do praktyki

W praktyce poprawne oszacowanie średniej warunkowej może sprawiać pewne trudności ze względu na to, że – jak pisaliśmy o tym w rozdziale 1 – zależności liniowe występujące w stopach zwrotu są słabe. Niektórzy badacze (Poon 2005, Figlewski 1997) uważają nawet, że lepiej zrezygnować z włączania do modelu źle wyspecyfikowanej średniej, niż wprowadzać za jej pośrednictwem szum losowy, zaburzając oszacowania zmienności i wariancji warunkowych.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

znaczenie starannego opracowania danych

W wypadku badania zależności pomiędzy różnymi szeregami, z praktycznego punktu widzenia bardzo ważne jest staranne opracowanie danych, polegające na wyrównaniu szeregu i sprawdzeniu zgodności dat dla porównywanych obserwacji. Nie wystarczy sprawdzić, że szeregi są równej długości. Uzgodnienie należy przeprowadzić dla szeregów notowań i dopiero potem wyliczyć stopy zwrotu.

metody postępowania w razie niezgodności dat

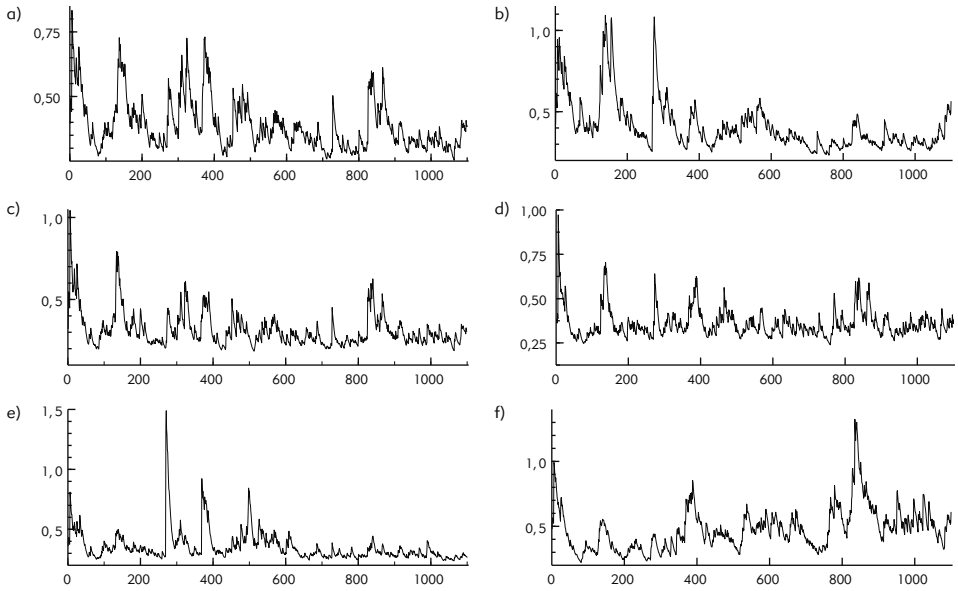
W razie niezgodności dat możliwe są dwie metody postępowania. Pierwsza polega na usuwaniu z szeregu obserwacji z dnia (ogólnie mówiąc okresu), w którym nie występuje ona w pozostałych szeregach. Stosując drugie podejście, uzupełniamy brakujące obserwacje wstawiając w puste miejsca albo niezmienioną cenę z dnia (okresu) poprzedniego, albo średnią cen z dwóch sąsiednich dni. Trudno powiedzieć jednoznacznie, które metoda postępowania jest lepsza. Kiedy szeregi mają długotrwałe luki, wstawianie niezmienionej ceny z poprzedniego dnia skutkuje dużą liczbą zer w szeregach stóp zwrotu i utrudnia modelowanie. Jednakże usuwanie obserwacji oznacza usuwanie informacji na temat dynamiki szeregów. Wybór podejścia zależy od osoby przeprowadzającej analizę, to ona musi go dokonać, mając na względzie cel badania i charakter danych.

Sposób działania modeli M-GARCH przedstawimy, modelując zależności warunkowe pomiędzy sześcioma szeregami kursów wymiany PLN: CHF/PLN, CZK/PLN, EUR/PLN, GBP/PLN, HUF/PLN oraz USD/PLN z okresu od 1 stycznia 2002, to jest od wprowadzenia waluty euro w dwunastu państwach UE, do 31 marca 2006. Jako pierwsze omówimy badanie oparte na zastosowaniu modelu DCC (Doman R. 2007), a następnie, dla porównania, podamy wyniki uzyskane za pomocą modeli Scalar-BEKK, Diag-BEKK, CCC i GO-GARCH.

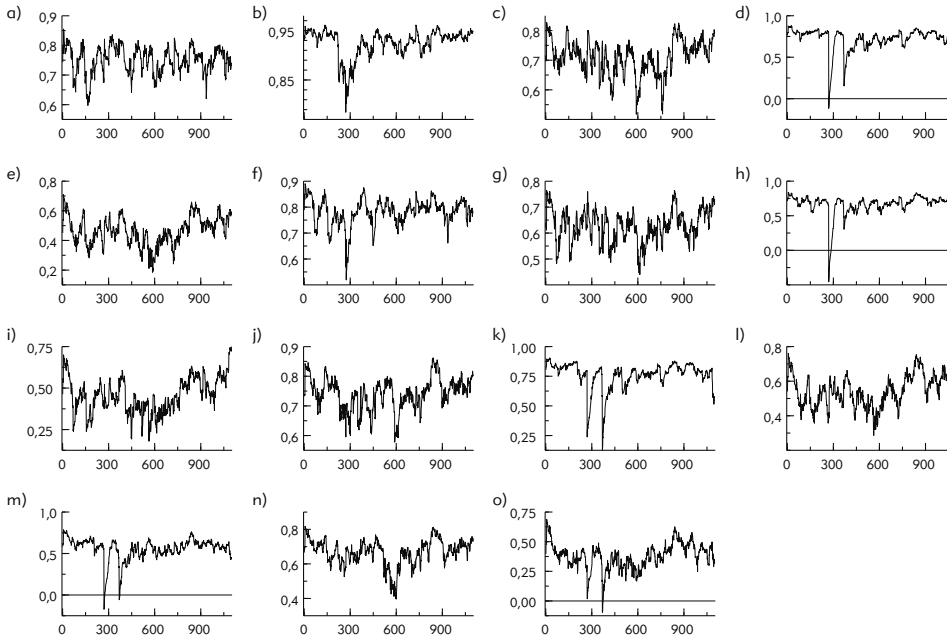
Na ilustracji 12.1 zostały przedstawione oszacowania zmienności, a na ilustracji 12.2 oszacowania korelacji warunkowych uzyskanych za pomocą modelu DCC o parametrach podanych w tabeli 12.1.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 12.1. Oszacowania wariancji warunkowej zwrotów kursów: CHF/PLN (a), CZK/PLN (b), EUR/PLN (c), GBP/PLN (d), HUF/PLN (e), USD/PLN (f) otrzymane za pomocą modelu DCC



Ilustracja 12.2. Oszacowania korelacji warunkowych zwrotów kursów złotego: CHF–CZK (a), CHF–EUR (b), CHF–GBP (c), CHF–HUF (d), CHF–USD (e), CZK–EUR (f), CZK–GBP (g), CZK–HUF (h), CZK–USD (i), EUR–GBP (j), EUR–HUF (k), EUR–USD (l), GBP–HUF (m), GBP–USD (n), HUF–USD (o)



Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Tabela 12.1. Oszacowania parametrów dopasowanych modeli DCC z warunkowym rozkładem normalnym i warunkowym rozkładem *t* Studenta (w nawiasach podane są błędy standardowe)

Szereg zwrotów	Parametr	Rozkład *t* Studenta, $\eta = 9{,}128$	Szereg zwrotów	Parametr	Rozkład *t* Studenta, $\eta = 9{,}128$
CHF/PLN	ω	0,0151 (0,0076)	GBP/PLN	ω	0,0305 (0,0140)
	α_1	0,0423 (0,0141)		α_1	0,0583 (0,0583)
	β_1	0,9186 (0,0284)		β_1	0,8633 (0,0481)
CZK/PLN	ω	0,0104 (0,0057)	HUF/PLN	ω	0,0093 (0,0058)
	α_1	0,0405 (0,0134)		α_1	0,0443 (0,0166)
	β_1	0,9319 (0,0241)		β_1	0,9249 (0,0314)
EUR/PLN	ω	0,0192 (0,0083)	USD/PLN	ω	0,0134 (0,0071)
	α_1	0,0636 (0,0202)		α_1	0,0565 (0,0176)
	β_1	0,8756 (0,0391)		β_1	0,9176 (0,0261)
model DCC	α	0,0250 (0,0040)			
	β	0,9597 (0,0081)			

Otrzymane oszacowania dynamicznych korelacji warunkowych są, poza czterema przypadkami (CHF/PLN–HUF/PLN, CZK/PLN–HUF/PLN, GBP/PLN–HUF/PLN oraz HUF/PLN–USD/PLN), dodatnie i zmieniają się w czasie. Wyraźne odbicie w uzyskanych wynikach znajdują zawirowania związane z sytuacją forinta. Najsilniejszą dodatnią warunkową korelację wykazują pary CHF/PLN–EUR/PLN, CHF/PLN–HUF/PLN oraz CHF/PLN–CZK/PLN.

Jako przykład zastosowania otrzymanych oszacowań warunkowych kowariancji przedstawimy konstrukcję dynamicznego portfela o minimalnej wariancji warunkowej, zawierającego waluty, których kursy, odniesione do PLN, były przedmiotem omówionego badania. Zmieniające się w czasie udziały w_t w takim portfelu zostały wyznaczone za pomocą formuły:

$$\mathbf{w}_t = \frac{\mathbf{H}_t^{-1}\mathbf{e}}{C_t}$$

gdzie $C_t = \mathbf{e}'\mathbf{H}_t^{-1}\mathbf{e}$, a $\mathbf{H}_t$ jest macierzą warunkowych kowariancji opartych na informacji do momentu t–1, $\mathbf{e} = (1, \ldots, 1)'$. Nie zostały wprowadzone żadne ograniczenia na krótką sprzedaż, która jest sygnalizowana jako udział ujemny. Wykresy dynamicznych udziałów poszczególnych walut przedstawiono na ilustracji 12.3.

Dla porównania przedstawimy teraz wyniki oszacowań korelacji warunkowych dla rozważanych szeregów stóp zwrotu kursów walutowych uzyskane za pomocą innych modeli. Oszacowania parametrów diagonalnego modelu BEKK przedstawiamy w tabeli 12.2, a oszacowania wariancji warunkowych i korelacji uzyskane za pomocą tego modelu – na ilustracjach 12.4 i 12.5.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 12.3. Oszacowania udziałów w dynamicznym portfelu o minimalnej wariancji warunkowej: CHF/PLN (a), CZK/PLN (b), EUR/PLN (c), GBP/PLN (d), HUF/PLN (e), USD/PLN (f)

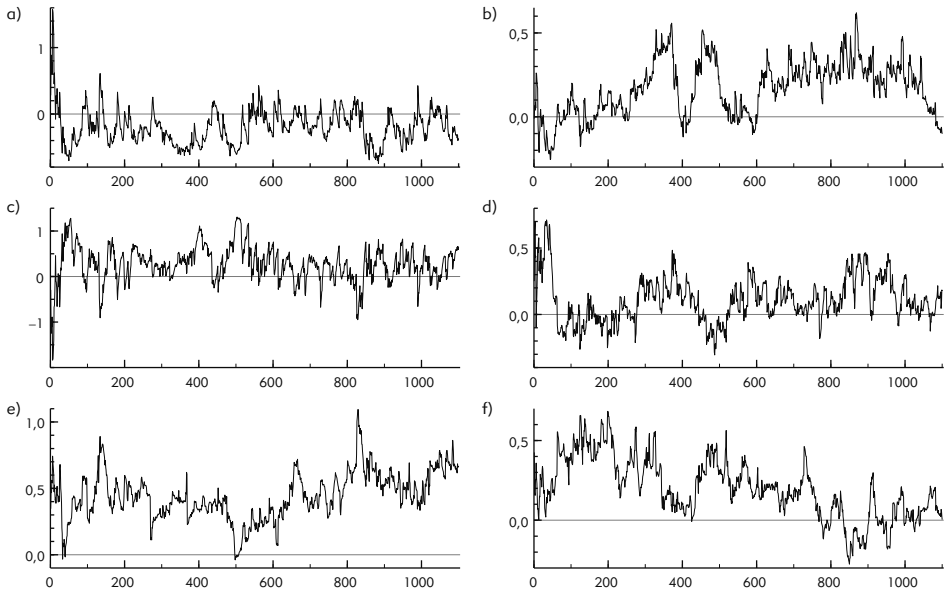


Tabela 12.2. Oszacowania parametrów modelu Diag-BEKK(1,1,1). Liczba stopni swobody rozkładu *t* Studenta: 8,7398. W części C przedstawiono elementy macierzy głównej trójkątnej, a kolumny oznaczone jako A i G zawierają przekątne macierzy diagonalnych A i G z równania (12.13)

C						A	G
0,1018 (0,0232)	0,0693 (0,0156)	0,1096 (0,0120)	0,0758 (0,0143)	0,1176 (0,0271)	0,0613 (0,0148)	0,1756 (0,0223)	0,9726 (0,0091)
	0,0582 (0,0184)	0,0189 (0,0189)	0,0154 (0,0059)	0,0402 (0,0409)	0,0257 (0,0112)	0,1710 (0,0233)	0,9752 (0,0085)
		0,0209 (0,0104)	0,0333 (0,0180)	– 0,0450 (0,0184)	0,0413 (0,0156)	0,1969 (0,0176)	0,9614 (0,0075)
			0,0584 (0,0233)	0,0295 (0,0321)	0,0460 (0,0174)	0,1435 (0,0170)	0,9767 (0,0071)
				0	– 0,385 (0,0547)	0,2371 (0,0332)	0,9433 (0,0167)
					0,0748 (0,0358)	0,1885 (0,0236)	0,9675 (0,0085)

Dla porównania, w tabeli 12.3 zamieszczone są oszacowania stałych korelacji warunkowych otrzymane za pomocą modelu CCC. Ilustracje 12.6–12.8 pozwalają na zapoznanie się z dynamiką korelacji warunkowych oszacowanych przy

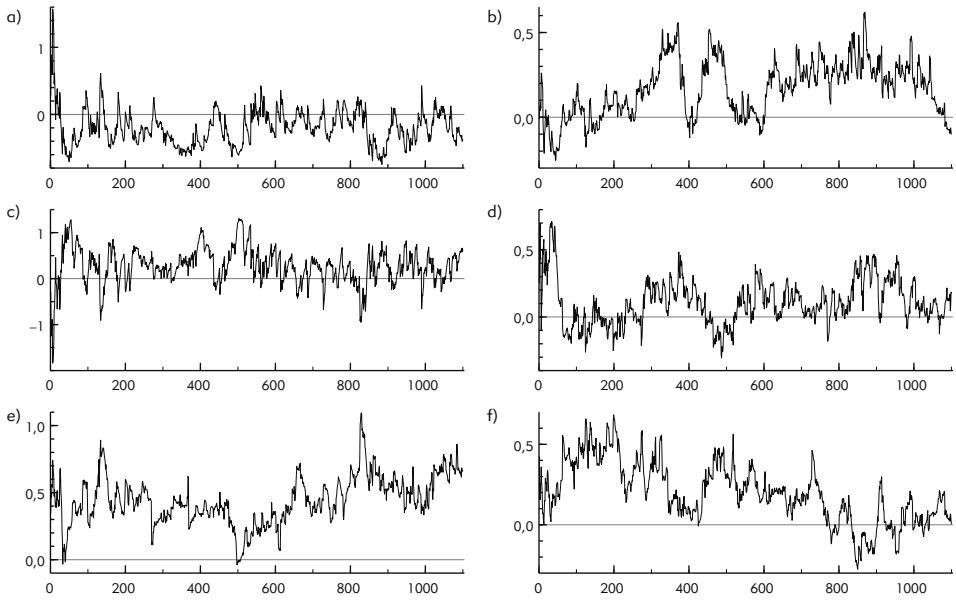
Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

użyciu kolejnych modeli (por. ilustrację 12.2). Czytelnik łatwo zauważy różnice w charakterze dynamiki korelacji wyznaczonej przez modele ortogonalne oraz modele BEKK i DCC.

Tabela 12.3. Oszacowania stałych korelacji warunkowych z modelu CCC

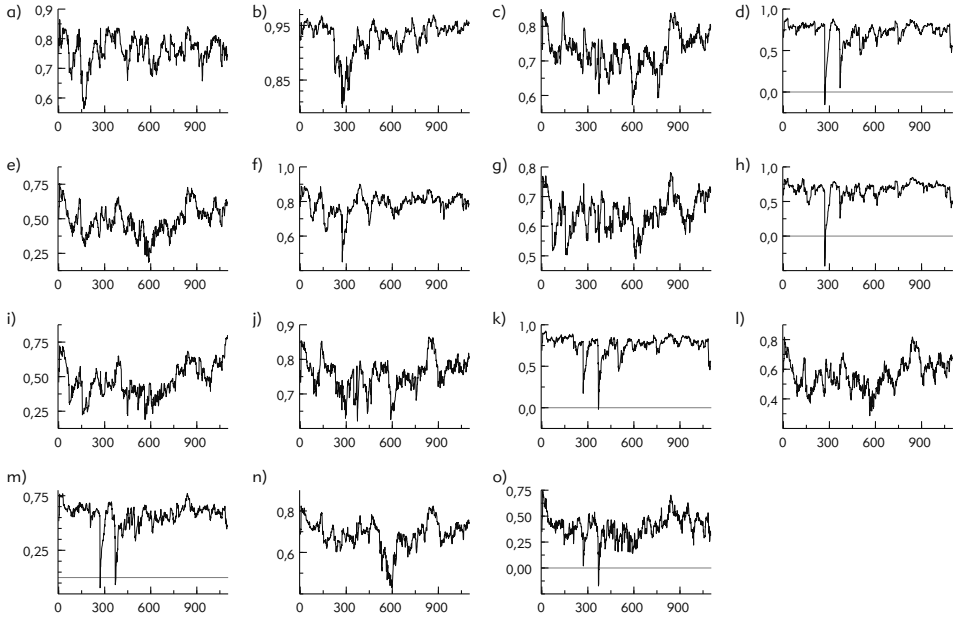
CZK/PLN	EUR/PLN	GBP/PLN	HUF/PLN	USD/PLN	Kursy
0,7561 (0,0116)	0,9239 (0,0040)	0,7204 (0,0128)	0,7326 (0,0154)	0,4677 (0,0216)	CHF/PLN
	0,7852 (0,0110)	0,6364 (0,0167)	0,6735 (0,0175)	0,4586 (0,0237)	CZK/PLN
		0,7467 (0,0122)	0,7628 (0,0145)	0,5466 (0,0194)	EUR/PLN
			0,7467 (0,0122)	0,6673 (0,0153)	GBP/PLN
				0,3768 (0,0249)	HUF/PLN

Ilustracja 12.4. Diagonalny model BEKK. Oszacowania zmienności: CHF/PLN (a), CZK/PLN (b), EUR/PLN (c), GBP/PLN (d), HUF/PLN (e), USD/PLN (f)

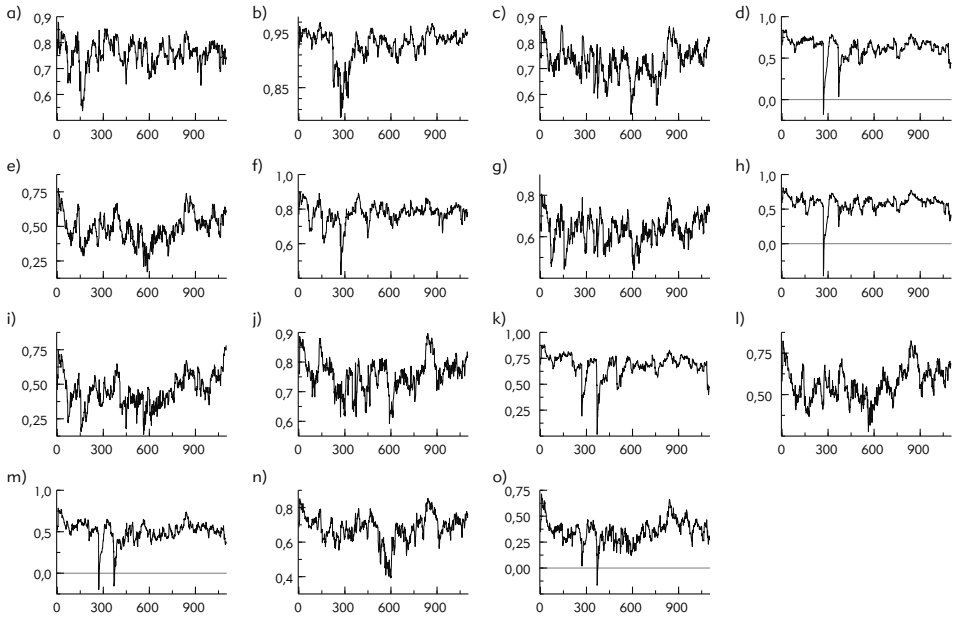


Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 12.5. Diagonalny model BEKK. Oszacowania korelacji warunkowych: CHF–CZK (a), CHF–EUR (b), CHF–GBP (c), CHF–HUF (d), CHF–USD (e), CZK–EUR (f), CZK–GBP (g), CZK–HUF (h), CZK–USD (i), EUR-GBP (j), EUR–HUF (k), EUR–USD (l), GBP–HUF (m), GBP–USD (n), HUF–USD (o)

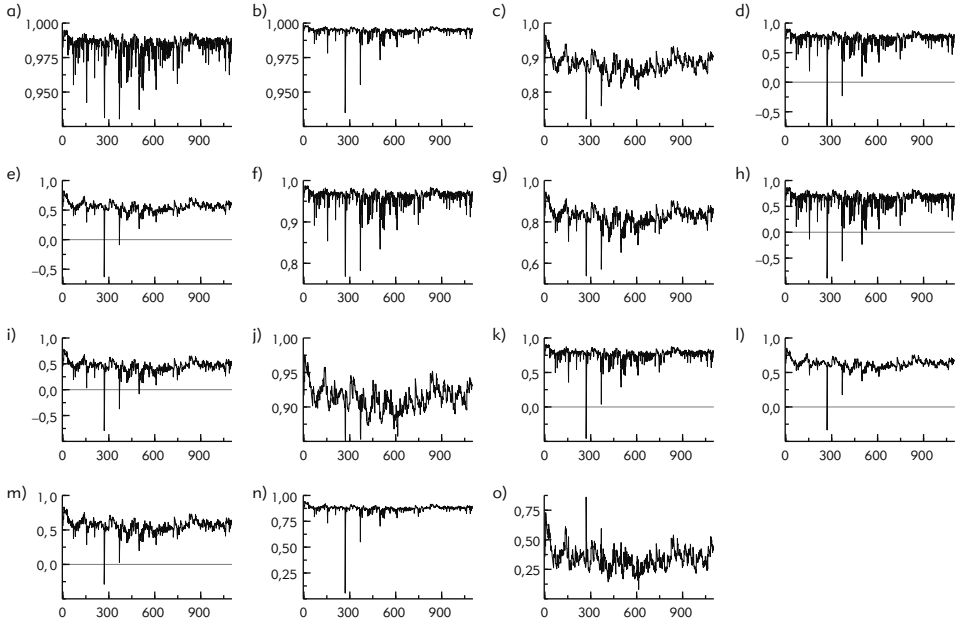


Ilustracja 12.6. Skalarny model BEKK: CHF–CZK (a), CHF–EUR (b), CHF–GBP (c), CHF–HUF (d), CHF–USD (e), CZK–EUR (f), CZK–GBP (g), CZK–HUF (h), CZK–USD (i), EUR–GBP (j), EUR–HUF (k), EUR–USD (l) GBP–HUF (m), GBP–USD (n), HUF–USD (o)

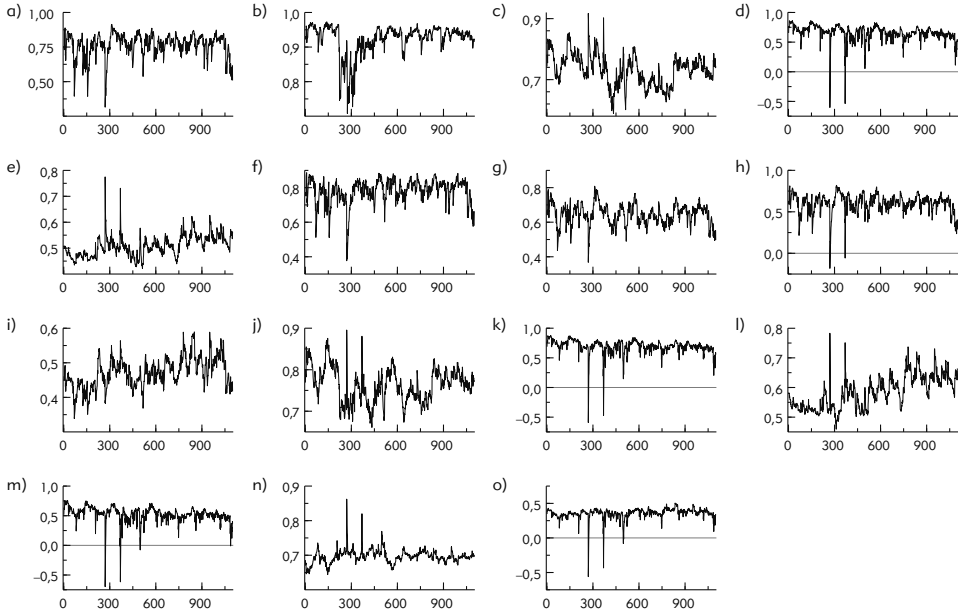


Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 12.7. O-GARCH: CHF–CZK (a), CHF–EUR (b), CHF–GBP (c), CHF–HUF (d), CHF–USD (e), CZK–EUR (f), CZK–GBP (g), CZK–HUF (h), CZK–USD (i), EUR–GBP (j), EUR–HUF (k), EUR–USD (l), GBP–HUF (m), GBP–USD (n), HUF–USD (o)



Ilustracja 12.8. GO–GARCH: CHF–CZK (a), CHF–EUR (b), CHF–GBP (c), CHF–HUF (d), CHF–USD (e), CZK–EUR (f), CZK–GBP (g), CZK–HUF (h), CZK–USD (i), EUR–GBP (j), EUR–HUF (k), EUR–USD (l), GBP–HUF (m), GBP–USD (n), HUF–USD (o)



Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

12.10. Uwagi

Więcej informacji na temat modeli wektorowej autoregresji znajduje się na przykład w książkach Lütkepohla (2005) i Tsaya (2005), a w języku polskim – w książkach Osińskiej (2006, 2007).

Podstawowe wiadomości z zakresu wielowymiarowych modeli zmienności można znaleźć również w monogra fiach Tsaya (2005) i Lütkepohla (2005). Dość szeroki przegląd specyfikacji wielowymiarowych modeli GARCH przedstawiają Bauwens, Laurent i Rombouts (2006).

Modele M-GARCH są tylko jednym z możliwych narzędzi służących do wyznaczania kowariancji i korelacji warunkowych. Alternatywną możliwość stanowią wielowymiarowe modele zmienności stochastycznej SV. W Polsce związane z nimi badania prowadzi się głównie metodami bayesowskimi (Pajor 2006, 2007, Osiewalski i Pajor 2007).

Wyniki badań związanych z wielowymiarowymi modelami GARCH i ich zastosowaniami w odniesieniu do polskiego rynku finansowego są przedstawione na przykład w pracach Osiewalskiego i Pipienia (2005), Fiszedera (2007, 2003), Pajor (2006), Piontka (2006, 2006a), M. Doman (2003), R. Domana (2004a, 2007).

Interesujące wyniki dotyczące porównań metodami bayesowskimi różnych wielowymiarowych modeli zmienności można znaleźć w publikacjach: Osiewalski i in. (2006), Osiewalski i Pipień (2004, 2004a).

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

13

Wartość zagrożona portfela

W rozdziale 9 przedstawiliśmy definicję wartości zagrożonej i pokazaliśmy, w jaki sposób można wykorzystać modele zmienności do szacowania VaR dla pojedynczych instrumentów. W rozdziale 10 pokazane zostały kolejne metody pozwalające na szacowanie VaR w takim wypadku. Jednak znaczenie VaR w praktyce rynku finansowego jest związane z koniecznością monitorowania ryzyka dla dużych portfeli składających się z pozycji w bardzo zróżnicowanych instrumentach. Oceniając ryzyko portfela, trzeba uwzględniać stopień powiązania pomiędzy notowaniami jego składowych zmniejszający efekt dywersyfikacji, co oznacza, że należy dokonywać co najmniej analizy korelacji. Przy stosowanym przez nas podejściu dynamicznym będą to korelacje warunkowe uwzględniające zmiany siły (i kierunku) powiązań w czasie.

Ogólnie rzecz biorąc, szacowanie VaR dla portfela złożonego z różnych instrumentów, zwłaszcza jeśli tych składowych jest wiele, jest bardzo skomplikowanym problemem. Mimo licznych prób ekonometria finansowa do dziś nie zna jego w pełni satysfakcjonującego rozwiązania. Modeli zależności warunkowych opisanych w poprzednim rozdziale na ogół nie da się łatwo stosować, ponieważ ich estymacja w wypadku naprawdę dużych portfeli sprawia trudności.

13.1. Metoda symulacji historycznej

Najprostsze możliwe podejście do szacowania VaR portfela sprowadza się do potraktowania go jako jednego instrumentu i zastosowania metody symulacji historycznej opisanej w podrozdziale 9.1.

Kolejna metoda polega na tym, że szacuje się na podstawie danych historycznych korelacje pomiędzy stopami zwrotu z poszczególnych składowych portfela i wykorzystuje je do oszacowania wariancji portfela. Następnie przyjmuje się,

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

że znany jest typ rozkładu stopy zwrotu z portfela i wylicza wartość zagrożoną wyznaczając odpowiedni kwantyl tego rozkładu.

Załóżmy, że mamy dany portfel złożony z N instrumentów, których udziały w portfelu oznaczymy przez $w_1, \ldots, w_N$, ($\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$), stopy zwrotu z poszczególnych instrumentów w okresie t przez $r_{i,t}$, a stopę zwrotu z portfela przez $r_{p,t}$, przy czym w_i jest udziałem wartości pozycji zajętej w i-tym instrumencie w wartości portfela.

Wartość oczekiwaną i wariancję stopy zwrotu z portfela można wtedy wyrazić odpowiednio za pomocą wzorów (13.1) i (13.2):

$$E(r_{p,t}) = \mu_p = \sum_{i=1}^{N} w_i \mu_i \tag{13.1}$$

gdzie μ_i jest średnią stopą zwrotu z i-tego instrumentu,

$$\begin{aligned} &\operatorname{var}(r_{p,t}) = \sigma_p^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, j\neq i}^{N} w_i w_j \sigma_{ij} = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, j\neq i}^{N} w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \end{aligned} \tag{13.2}$$

gdzie:

$\sigma_i^2 = \operatorname{var}(r_{i,t})$
$\sigma_{ij} = \operatorname{cov}(r_{i,t}, r_{j,t})$
ρ_{ij} – współczynnik korelacji
$\rho_{ij} = \dfrac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$

postać macierzowa wzoru na wariancję portfela

Jeżeli, tak jak w rozdziale 12, oznaczymy macierz kowariancji przez $\mathbf{\Gamma}_0$, a przez $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_N)'$, – wektor udziałów w portfelu, to wzór (13.2) na wariancję portfela można zapisać w postaci macierzowej:

$$\sigma_p^2 = \mathbf{w}'\mathbf{\Gamma}_0\mathbf{w} \tag{13.3}$$

Jeśli wielowymiarowy rozkład portfela jest normalny lub, ogólniej, eliptyczny (zob. podrozdział 12.6), to oznaczając przez z_α i $z_{1-\alpha}$ kwantyle jego standaryzowanego jednowymiarowego rozkładu brzegowego, możemy wzory na wartość zagrożoną dla pozycji długiej i krótkiej w tym portfelu napisać, odpowiednio, w postaci:

$$\mathrm{VaR}_{(p)}^{l}(\alpha) = -(\mu_p + \sigma_p z_\alpha) = -(\mu_p + z_\alpha \sqrt{\mathbf{w}'\mathbf{\Gamma}_0\mathbf{w}}) \tag{13.4}$$

$$\mathrm{VaR}_{(p)}^{s}(\alpha) = \mu_p + \sigma_p z_{1-\alpha} = \mu_p + z_{1-\alpha} \sqrt{\mathbf{w}'\mathbf{\Gamma}_0\mathbf{w}} \tag{13.5}$$

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Załóżmy, że $(\mu_1, \ldots, \mu_N)' = \mathbf{0}$, a kwantyle standaryzowanych rozkładów stóp zwrotu z instrumentów są takie same jak w wypadku portfela. Niech $\mathbf{R}$ oznacza macierz współczynników korelacji ρ_{ij}, a przez $\mathbf{V}$ oznaczmy macierz diagonalną mającą na przekątnej wartości zagrożone dla poszczególnych instrumentów:

$$\mathbf{V} = \mathrm{diag}\left(\mathrm{VaR}_{(1)}(\alpha), \ldots, (\mathrm{VaR}_{(N)}(\alpha)\right)$$

W takiej sytuacji zależność wartości zagrożonej portfela od wartości zagrożonych poszczególnych instrumentów można zapisać w następującej syntetycznej postaci:

$$\mathrm{VaR}_{(p)}(\alpha) = \sqrt{\mathbf{w}'\mathbf{VRVw}} \tag{13.6}$$

13.2. Szacowanie wartości zagrożonej portfela za pomocą wielowymiarowych modeli GARCH

Podobnie jak w wypadku poszczególnych instrumentów, VaR portfela możemy analizować w sposób dynamiczny, uwzględniający napływ nowych informacji. Posługujemy się wtedy momentami warunkowymi i określeniami VaR podanymi we wzorach (9.9) i (9.10). Wariancję warunkową portfela wyznaczamy wstawiając do wzoru (13.2) odpowiednie wielkości warunkowe. Wariancje i kowariancje warunkowe szacujemy na przykład za pomocą wielowymiarowych modeli GARCH opisanych w poprzednim rozdziale. Możliwe są przy tym dwa podejścia. Pierwsze polega na tym, że stosujemy model M-GARCH łącznie do wszystkich stóp zwrotu instrumentów z portfela i uzyskujemy tym samym pełny obraz warunkowych zależności liniowych pomiędzy instrumentami. W podejściu drugim, uproszczonym i nie zawsze poprawnym, ale za to znacznie częściej mającym szansę zrealizowania w praktyce, wyznacza się oddzielnie kowariancje warunkowe dla każdej pary instrumentów, a następnie na ich podstawie wylicza się wariancje „warunkowe" portfela.

Na zakończenie chcielibyśmy podkreślić, że nie należy w tych samych obliczeniach VaR stosować wielkości bezwarunkowych i warunkowych. Na przykład nie można łączyć oszacowań wariancji z modeli GARCH z kowariancjami z próby. Te wielkości mają odmienną naturę.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

13.3. Koherentne miary ryzyka

Jednym z zarzutów, które stawia się wartości zagrożonej jako mierze ryzyka portfela, jest to, że nie ma ona pewnych właściwości, które wydają się naturalne z punktu widzenia zarządzania ryzykiem. Miary ryzyka posiadające takie naturalne własności nazywa się koherentnymi (Artzner i in. 1997). Definicja koherentnej miary ryzyka jest następująca.

Oznaczmy przez $\mathcal{M}$ wypukły zbiór zmiennych losowych określonych na tej samej przestrzeni probabilistycznej, interpretowanych jako możliwe zmiany wartości portfela w danym horyzoncie czasowym. Funkcję:

$$\rho: \mathcal{M} \to \mathbb{R}$$

nazywamy koherentną miarą ryzyka, jeżeli posiada następujące własności:

- *Subaddytywność*. Dla każdej pary $X_1, X_2 \in \mathcal{M}$, zachodzi $\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$.
- *Monotoniczność*. Dla każdych $X, Y \in \mathcal{M}$, takich że prawie na pewno $X \leq Y$, spełniona jest nierówność $\rho(Y) \leq \rho(X)$.
- *Dodatnia jednorodność*. Dla każdego $\lambda > 0$ i dla każdego $X \in \mathcal{M}$ zachodzi $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$.
- *Niezmienniczość*. Dla każdego $X \in \mathcal{M}$ i każdego $a \in \mathbb{R}$ interpretowanego jako pewna strata lub pewny zysk zachodzi równość $\rho(X+a) = \rho(X) - a$.

Subaddytywność jest właściwością uwzględniającą efekt dywersyfikacji ryzyka. Monotoniczność sprowadza się do stwierdzenia, że pozycja, dla której możliwa zmiana wartości jest zawsze nie mniej korzystna nie jest obarczona większym ryzykiem. Dodatnia jednorodność oznacza, że multiplikatywna zmiana pozycji powoduje analogiczną zmianę miary ryzyka. Niezmienniczość można zinterpretować następująco. Dodanie do portfela instrumentu wolnego od ryzyka zmniejsza ryzyko całego portfela.

Wartość zagrożona portfela w ogólnym przypadku nie jest koherentną miarą ryzyka. Jest nią natomiast, gdy wektor zwrotów wszystkich instrumentów, z których tworzy się rozważane portfele, ma rozkład eliptyczny (McNeil i in. 2005). Przykładem koherentnej miary ryzyka jest tzw. oczekiwany niedobór, rozumiany jako wartość oczekiwana straty, pod warunkiem że strata będzie większa niż założony VaR (Pflug 2000, McNeil i in. 2005). Oczekiwany niedobór jest też czasami nazywany warunkową wartością zagrożoną (*Conditional Value at Risk* – CVaR).

oczekiwany niedobór jako przykład koherentnej miary ryzyka

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

13.4. Od teorii do praktyki

Przedstawimy teraz przykład wykorzystania wielowymiarowych modeli zmienności do szacowania wartości zagrożonej portfela. Wykorzystamy w tym celu oszacowania korelacji warunkowych przedstawione w podrozdziale 12.9.

Zanim przedstawimy przykłady dotyczące modelowania VaR, warto może poruszyć temat praktycznych trudności związanych z szacowaniem VaR rzeczywiście istniejącego portfela aktywów. Przede wszystkim, jak już wspominaliśmy, realne portfele instytucji finansowych, np. funduszy inwestycyjnych, są bardzo duże. Stwarza to trudności obliczeniowe przy szacowaniu korelacji pomiędzy instrumentami. Drugi, zupełnie praktyczny problem wynika z częstych zmian w składzie portfeli i dotyczy wątpliwości, jak w takiej sytuacji wstecznie testować VaR. Trudność nie jest związana tylko ze zmianami, ale na przykład także z tym, że do portfeli często dołączane są nowe instrumenty nie mające historii, co powoduje, że nie ma na czym szacować modeli. Wszystko to wpływa na to, że problematyka VaR nadal jest intensywnie badana zarówno przez praktyków, jak i w pracach akademickich.

częste zmiany w składzie portfeli a wsteczne testowanie VaR

Wykorzystując oszacowania korelacji warunkowych przedstawione w rozdziale 12, dokonamy teraz oszacowań wartości zagrożonej dla rozważanego tam portfela. Prezentację przykładu rozpoczniemy od przedstawienia wyliczeń VaR wykorzystujących wyniki uzyskane za pomocą modelu DCC. Ilustracje 13.1 i 13.2 przedstawiają oszacowania VaR na poziomie istotności 0,01 oraz 0,05 (w próbie) w zestawieniu ze zrealizowanymi stopami zwrotu z portfela.

Tabela 13.1 zawiera wyniki testu Kupca i wartości oczekiwanych niedoborów ESF1 i ESF2 (por. rozdział 9). Jakość oszacowań VaR jest dobra. Poza jednym przypadkiem pozycji długiej (na poziomie istotności 0,01) hipoteza zerowa testu Kupca o zgodności liczby przekroczeń z założoną nie została odrzucona.

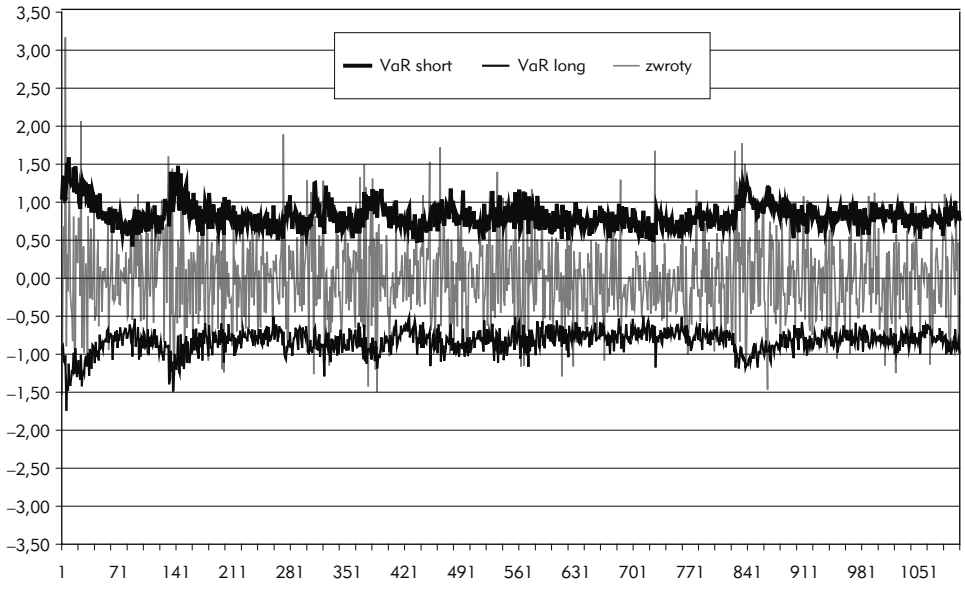
Oszacowania zmienności i zależności warunkowych uzyskane za pomocą modelu DCC dały w wypadku analizowanego portfela wyliczenia VaR lepszej jakości niż otrzymane przy użyciu modeli Diag-BEKK czy O-GARCH. Zastosowanie dwóch ostatnich modeli skutkowało znacznym przeszacowaniem VaR, co wyraźnie widać na ilustracjach 13.3 i 13.4. Test Kupca zaakceptował oszacowania z diagonalnego modelu BEKK tylko w jednym przypadku – pozycji krótkiej i poziomie istotności 0,01. Dla modelu O-GARCH hipoteza zerowa została odrzucona we wszystkich przypadkach.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Tabela 13.1. DCC. Portfel o równych udziałach. Wyniki testu Kupca (liczba obserwacji 1100)

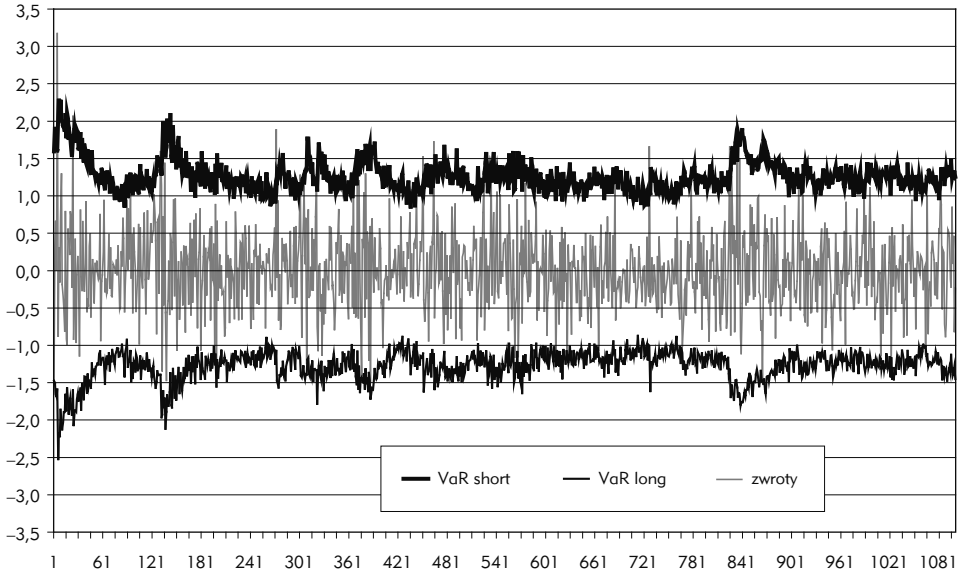
Pozycja	α	Liczba przekroczeń	Udział przekroczeń	Statystyka Kupca	*p*-wartość	ESF1	ESF2
krótka	0,05	57	0,0518	0,0757	0,7832	1,1776	1,4529
	0,025	37	0,0336	3,0426	0,0811	1,3318	1,3213
	0,01	15	0,0136	1,3194	0,2507	1,6490	1,3111
długa	0,05	51	0,0463	0,3135	0,5755	1,0400	1,2358
	0,025	20	0,0182	2,3142	0,1282	1,1830	1,1691
	0,01	5	0,0045	4,1484	0,0417	1,2727	1,0477

Ilustracja 13.1. DCC. Oszacowania VaR na poziomie istotności 0,01 w porównaniu ze zrealizowanymi stopami zwrotu

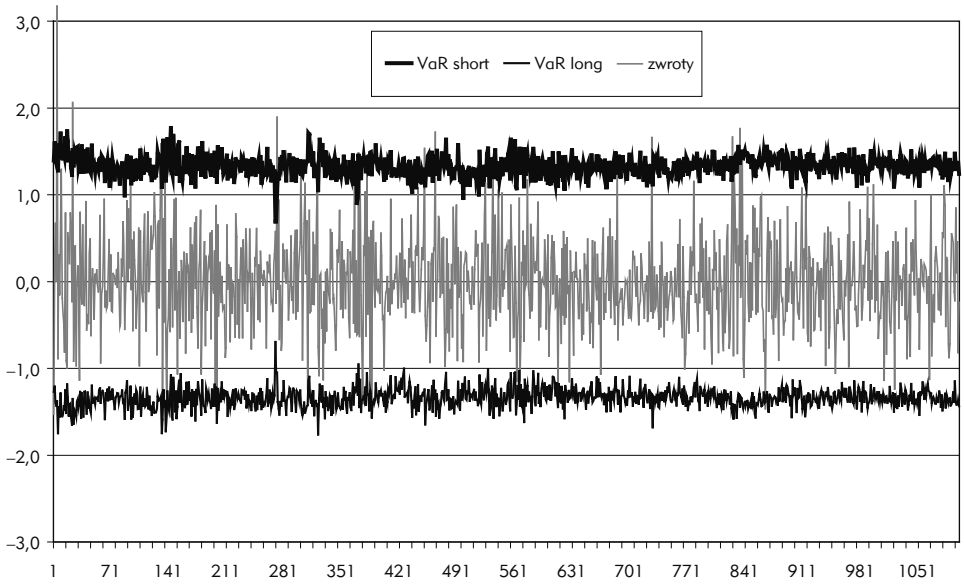


Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 13.2. DCC. Oszacowania VaR na poziomie istotności 0,05 w porównaniu ze zrealizowanymi stopami zwrotu

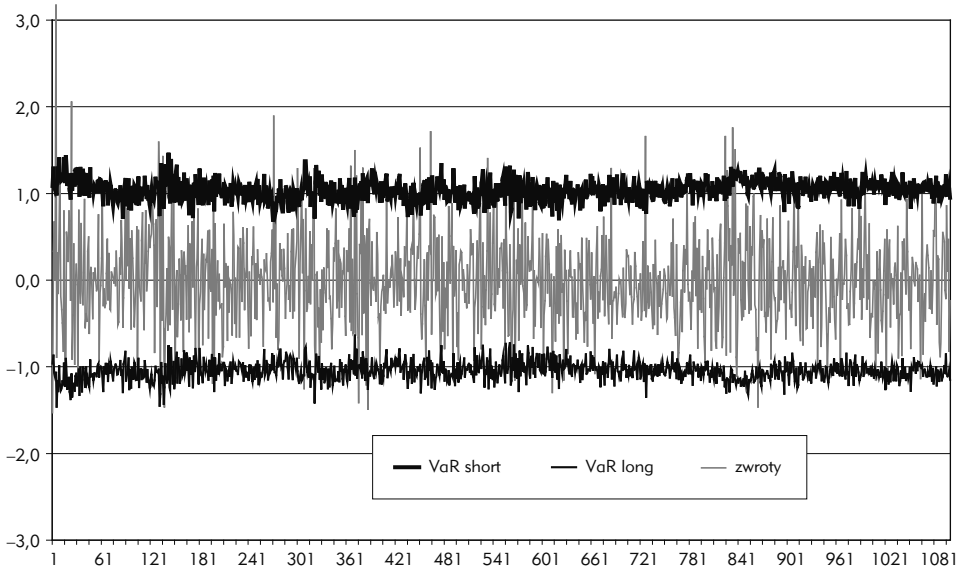


Ilustracja 13.3. O-GARCH. Oszacowania VaR na poziomie istotności 0,05 w porównaniu ze zrealizowanymi stopami zwrotu



Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ilustracja 13.4. Diagonalny BEKK. Oszacowania VaR na poziomie istotności 0,05 w porównaniu ze zrealizowanymi stopami zwrotu



13.5. Uwagi

Przedstawiony tu materiał sygnalizuje tylko ważny problem szacowania VaR dla portfeli. Znaczenie praktyczne tego zagadnienia jest ogromne i pojawia się ostatnio zwłaszcza w kontekście zarządzania ryzykiem kredytowym i ryzykiem związanym z kredytowymi instrumentami pochodnymi. W celu zaznajomienia się ze szczegółami rozwiązań zalecanych w praktyce rynków finansowych warto prześledzić na przykład dokumenty techniczne RiskMetrics i CreditMetrics. Ponownie, jako dobre źrodło artykułów poświęconych tej tematyce, można wskazać strony internetowe www.gloriamundi.org oraz www.riskmetrics.com.

Jeśli czytelnik chce szybko zdobyć podstawowe informacje z teorii portfelowej i ogólnie modeli rynków finansowych, to powinien zapoznać się z syntetycznym wykładem zawartym w pracy Jajugi i Jajugi (2004).

Wyniki zastosowania wielowymiarowych modeli GARCH do szacowania wartości zagrożonej na polskim rynku finansowym przedstawione są w pracach (Fiszeder 2007), (Papla 2007), (Piontek i Papla 2005), (Humeńczuk 2005).

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Zakończenie

Omawiając metody i modele ekonometrii finansowej, przedstawiliśmy jednocześnie wiele przykładów empirycznych. Zależało nam bowiem, żeby czytelnik miał możliwość wyrobienia sobie pewnych intuicji na temat mechanizmów opisywanych przez modele oraz możliwości i ograniczeń stosowanych metod, a także zapoznał się z bogatą różnorodnością dynamiki rynków finansowych, którą zawsze trzeba uwzględniać w praktyce modelowania. Idealnie byłoby, gdyby nabrał ochoty do samodzielnego działania w tym zakresie.

Jak można było zauważyć, dane różnią się w zależności od tego, z jakiego rynku pochodzą, z jaką częstotliwością są obserwowane i pobierane, a także z jakiego okresu pochodzą. Wszystkie te czynniki wpływają na wybór modeli i metod badań. Budując skomplikowane modele i dokonując obliczeń za pomocą szybkich i wydajnych pakietów numerycznych, dobrze jest mieć świadomość związanych z tym ograniczeń i zagrożeń. Nieodłączną częścią procesu modelowania jest interpretacja uzyskanych wyników, której nie można dokonać poprawnie bez przeanalizowania wydarzeń w otoczeniu gospodarczym, politycznym i społecznym rynku. Wszystko to sprowadza się do stwierdzenia, że modelując, trzeba brać pod uwagę rzeczywistość. Modelowanie rynków finansowych nie polega więc tylko na stosowaniu wyrafinowanych technik ilościowych i epatowaniu złożonością zaawansowanych metod matematycznych. Metody te mają nam tylko zapewnić, że to, co robimy, jest formalnie poprawne.

Jednym z celów modelowania jest oczywiście poznanie ukrytych reguł rządzących rynkami finansowymi, co daje badaczowi pewne zadowolenie płynące z lepszego zrozumienia świata. Jednak, przede wszystkim, modelowanie powinno pozwolić na stworzenie skutecznych narzędzi i wyjaśnień, które mogą być zastosowane w praktyce zarządzania ryzykiem inwestycji finansowych. W świecie globalnych finansów i błyskawicznego przemieszczania się kapitału z jednego końca świata na drugi i z powrotem, gwałtowny rozwój ekonometrii finansowej jest wywołany przede wszystkim ogromnym zapotrzebowaniem ze

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

strony praktyki na metody szacowania zmienności i zależności pomiędzy bardzo złożonymi instrumentami, co do których często nie ma żadnej pewności, jak je wyceniać. Model zmienności ma rację bytu jedynie wtedy, gdy przez sensowny okres pozwala na osiąganie tego celu w stosunku do jakiejś grupy instrumentów notowanych na jakimś rynku.

W ekonometrii finansowej, tak jak we wszystkich naukach empirycznych, ostatecznym kryterium przydatności modelu jest to, jak sprawdza się on w praktyce.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Dodatek

Tabela D.1. Kwantyle rozkładu asymptotycznego statystyki testu Phillipsa-Perrona

$P(Z_t < v)$	0,01	0,025	0,050	0,100	0,90	0,95	0,975	0,99
v	–3,96	–3,66	–3,41	–3,12	–1,25	–0,94	–0,66	–0,33

Źródło: W.A. Fuller (1976), *Introduction to Statistical Time Series*, Wiley, New York.

Tabela D.2. Kwantyle rozkładu asymptotycznego statystyki Lo

$P(U_{RIS} < v)$	0,005	0,025	0,50	0,100	0,200	0,300	0,400	0,500
v	0,721	0,809	0,862	0,927	1,018	1,090	1,157	1,223

$P(U_{RIS} < v)$	0,543	0,600	0,700	0,800	0,900	0,950	0,975	0,995
v	$\sqrt{\pi/2}$	1,294	1,374	1,473	1,620	1,747	1,862	2,098

Źródło: A.W. Lo (1991), *Long-Term Memory in Stock Market Prices*, Econometrica 59.

Tabela D.3. Wartości krytyczne rozkładu asymptotycznego statystyki testu KPSS względem poziomu

Poziom istotności	0,10	0,05	0,025	0,01
Wartość krytyczna	0,347	0,463	0,574	0,739

Źródło: D. Kwiatkowski i in. (1992), *Testing the Null Hypothesis of Stationarity Against the Alternative of a Unit Root: How Sure Are We That Economic Time Series Have a Unit Root?*, „Journal of Econometrics" 54.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Tabela D.4. Wartości krytyczne rozkładu asymptotycznego statystyki testu KPSS względem trendu

Poziom istotności	0,10	0,05	0,025	0,01
Wartość krytyczna	0,119	0,146	0,176	0,216

Źródło: D. Kwiatkowski i in. (1992), *Testing the Null Hypothesis of Stationarity Against the Alternative of a Unit Root: How Sure Are We That Economic Time Series Have a Unit Root?*, „Journal of Econometrics" 54.

Tabela D.5. Asymptotyczne wartości krytyczne dla testu Nybloma. Hipoteza zerowa: stabilny układ parametrów

Liczba parametrów	Poziom istotności					
	1%	2,5%	5%	7,5%	10%	20%
1	0,748	0,593	0,470	0,398	0,353	0,243
2	1,07	0,898	0,749	0,670	0,610	0,469
3	1,35	1,16	1,01	0,913	0,846	0,679
4	1,60	1,39	1,24	1,14	1,07	0,883
5	1,88	1,63	1,47	1,36	1,28	1,08
6	2,12	1,89	1,68	1,58	1,49	1,28
7	2,35	2,10	1,90	1,78	1,69	1,46
8	2,59	2,33	2,11	1,99	1,89	1,66
9	2,82	2,55	2,32	2,19	2,10	1,85
10	3,05	2,76	2,54	2,40	2,29	2,03
11	3,27	2,99	2,75	2,60	2,49	2,22
12	3,51	3,18	2,96	2,81	2,69	2,41
13	3,69	3,39	3,15	3,00	2,89	2,59
14	3,90	3,60	3,34	3,19	3,08	2,77
15	4,07	3,81	3,54	3,38	3,26	2,95
16	4,30	4,01	3,75	3,58	3,46	3,14
17	4,51	4,21	3,95	3,77	3,64	3,32
18	4,73	4,40	4,14	3,96	383	3,50
19	4,92	4,60	4,33	4,16	4,03	3,69
20	5,13	4,79	4,52	4,36	4,22	3,86

Źródło: B.E. Hansen (1992), *Testing for Parameter Instability in Linear Models*, „Journal of Policy Modeling" 14.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Literatura

Alexander C. (2001), *Market Models*, John Wiley, New York.

Alexander C., Chibumba A. (1997), *Multivariate Orthogonal Factor GARCH*, University of Sussex, Mimeo.

Alexiewicz A. (1969), *Analiza funkcjonalna*, PWN, Warszawa.

Andersen T., Bollerslev T. (1997), *Heterogeneous Information Arrivals and Return Volatility Dynamics. Uncovering the Long-Run in High Frequency Returns*, „The Journal of Finance", nr 52, s. 975–1005.

Andersen T.G., Bollerslev T. (1998), *Answering the Skeptics. Yes, Standard Volatility Models Do Provide Accurate Forecasts*, „International Economic Review", nr 39, s. 885–905.

Andersen T.G., Bollerslev T., Diebold F.X, Ebens H. (2001), *The Distribution of Realized Stock Return Volatility*, „Journal of Financial Economics", nr 61, s. 43–76.

Andersen T.G., Bollerslev T., Diebold F.X., Labys P. (2001a), *The Distribution of Realized Exchange Rate Volatility*, „Journal of the American Statistical Association", nr 96, s. 42–55.

Artzner P., Delbaen F., Eber J.M., Heath D. (1999), *Coherent Measures of Risk,* „Mathematical Finance", nr 2, s. 203–228.

Attanasio O.P. (1991), *Risk, Time Varying Second Moments and Market Efficiency*, „Review of Economic Studies", nr 58, s. 479–494.

Baba Y., Engle R.F., Kraft D.F., Kroner K.F. (1991), *Multivariate Simultaneous Generalized ARCH* [nieopublikowany manuskrypt], Department of Economics, University of California, San Diego.

Baillie R., Bollerslev T., Mikkelsen H. (1996), *Fractionally Integrated Generalized autoRegressive Conditional Heteroskedasticity*, „Journal of Econometrics", nr 74, s. 3–30.

Barański P. (2008), *Zmienność zrealizowana jako miara zmienności instrumentów finansowych* [praca magisterska], Wydział Informatyki i Gospodarki Elektronicznej Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań.

Barndorff-Nielsen O.E., Shephard N. (2001), *Non-Gaussian Ornstein Uhlenbeck-Based Models and Some of Their Uses in Financial Economics*, „Journal of the Royal Statistical Society", seria B, nr 63, s. 167–241.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Barndorff-Nielsen O.E., Shephard N. (2002), *Econometric Analysis of Realised Volatility and Its Use in Estimating Stochastic Volatility Models*, „Journal of the Royal Statistical Society", seria B, nr 64, s. 253–280.

Barndorff-Nielsen O.E., Shephard N. (2004), *Power and Bipower Variation with Stochastic Volatilitu and Jumps*, „Journal of Financial Econometrics", nr 2, s. 1–148.

Bauwens L., Laurent S., Rombouts J.V.K. (2006), *Multivariate GARCH Models. A Survey*, „Journal of Applied Econometrics", nr 21, s. 79–109.

Beine M., Laurent, S. (2001), *Structural Change and Long Memory in Volatility. New Evidence from Daily Exchange Rates*, [w:] *Developments in Forecast Combination and Portfolio Choice*, red. C. Dunis, A. Timmermann, J. Moody, John Wiley, New York, (Financial Economics and Quantitative Analysis), s. 159–177, [tu:] rozdział 7.

Berkes I., Horvarth L., Kokoszka P. (2003), *GARCH Process. Structure and Estimation*, „Bernoulli", nr 9, s. 201–227.

Bhansali R.J., Kokoszka P.S. (2001), *Prediction of Long Memory Time Series. An Overwiew*, „Estadistica", nr 53, s. 41–96.

Bollerslev T. (1986), *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*, „Journal of Econometrics", nr 31, s. 307–327.

Bollerslev T. (1987), *A Conditionally Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return*, „Review of Economics and Statistics", nr 69, s. 542–547.

Bollerslev T. (1988), *On the Correlation Structure for the Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic Process*, „Journal of Time Series Analysis", nr 9, s. 121–131.

Bollerslev T. (1990), *Modeling the Coherence in Short-Run Nominal Exchange Rates. A Multivariate Generalized ARCH Model*, „Review of Economics and Statistics", nr 72, s. 498–505.

Bollerslev T., Engle R.F., Nelson D.B. (1994), *ARCH Models*, [w:] *Handbook of Econometrics*, red. R.F. Engle, D.L. McFadden, North–Holland, Amsterdam, vol. 4, s. 2959–3038.

Bollerslev T., Engle R.F., Wooldridge J.M. (1988), *A Capital Asset Pricing Model with Time Varying Covariances*, „Journal of Political Economy", nr 96, s. 116–131.

Bollerslev T., Mikkelsen H. (1996), *Modeling and Pricing Long-Memory in Stock Market Volatility*, „Journal of Econometrics", nr 73, s. 151–184.

Bollerslev T., Wooldridge J.M. (1992), *Quasi-Maximum Likelihood Estimation and Inference in Dynamic Models with Time Varying Covariances*, „Econometric Reviews", nr 11, s. 143–172.

Box G.E.P., Jenkins G.M. (1983), *Analiza szeregów czasowych*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Brock W.A., Hsieh D.A., Scheinkman J.A., LeBaron B. (1996), *A Test for Independence Based on the Correlation Dimension*, „Econometric Reviews", nr 15, s. 97–235.

Brockett R.W. (1976), *Volterra Series and Geometric Control Data*, „Automatica", nr 12, s. 167–176.

Brockwell P.J., Davis R.A. (1991), *Time Series. Theory and Methods*, Springer, New York.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Bruzda J. (2003), *Procesy dwuliniowe i procesy GARCH w modelowaniu finansowych szeregów czasowych*, „Przegląd Statystyczny", 50 (2), s. 73–95.
Brzeszczyński J., Kelm R. (2002), *Ekonometryczne modele rynków finansowych*, WIG Press, Warszawa.
Brzeszczyński J., Welfe A. (2000), *Direction Quality Measures for ARCH Models. The Case of Warsaw Stock Exchange Stock Prices*, [w:] *Macromodels'1999. Proceedings of the 26th International Conference Macromodels*, Łódź.
Chan K.S. Tong H. (1986), *On Estimating Tresholds in Autoregressive Models*, „Journal of Time Series Analysis", nr 7, s. 179–190.
Chow G.C. (1960), *Tests of Equality Between Sets of Coefficients in Two Linear Regressions*, „Econometrica", nr 28, s. 591–605.
Chung C.F. (1999), *Estimating the Fractionally Integrated GARCH Model*, National Taiwan Uniwersity working paper.
Clark P.K. (1973), *A Subordinated Stochastic Process Model with Finite Variance for Speculative Prices*, „Econometrica", nr 41, s. 135–155.
Cont R. (2001), *Empirical Properties of Asset Returns. Stylized Facts and Statistical Issues*, „Qualitative Finance", vol. 1, s. 223–236.
Davidson J. (2004), *Moment and Memory Properties of Linear Conditional Heteroscedasticity Models, and a New Model*, „Journal of Business and Economic Statistics", nr 22, s. 16–29.
Davidson J. (2004a), *Forecasting Markov-Switching Dynamic Processes*, „Statistics and Probability Letters", nr 68(2), s. 137–147.
Davidson J. (2008), *Time Series Modelling. Version 4.26*, University of Exeter, Exeter.
Diebold F.X. (1986), *Modeling the Persistence of Conditional Variances. A Comment*, „Econometric Reviews", nr 5, s. 51–56.
Diebold F.X., Inoue A. (2001), *Long Memory and Structural Change*, „Journal of Econometrics", nr 105, s. 131–159.
Ding Z., Granger C.W.J., Engle R. (1993), *A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model*, „Journal of Empirical Finance", nr 1, s. 83–106.
Doman M. (2003), *Modeling Volatilities of Warsaw Stock Indices with GARCH and SV Models*, [w:] *Macromodels'2002. Proceedings of the 29th International Conference Macromodels*, Łódź, s. 225–235.
Doman M. (2004), *The Joint Dynamics of Returns, Volatility, and Volume on the Warsaw Stock Exchange*, [w:] *Macromodels'2003. Proceedings of the 30th International Conference Macromodels*, Łódź, s. 73–85.
Doman M. (2005), *Modelling Value at Risk with CAViaR Models. The Case of Polish Financial Market*, „Acta Universitatis Lodziensis. Folia Oeconomica", nr 190, s. 129–143.
Doman M. (2007), *Structural Breaks and Long Memory in the Volatility of Polish Exchange Rates*, [w:] *Financial Markets. Principles of Modelling, Forecasting, and Decision-Making*, red. W. Milo, P. Wdowiński (FindEcon Monograph Series. Advances in Financial Market Analysis, nr 5), Łódź University Press, Łódź.
Doman M. (2006), *Modeling the Realized Volatility with ARFIMA and Unobserved Component Models. Results from the Polish Financial Market*, [w:] *Financial Markets. Prin-*

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

ciples of Modelling, Forecasting, and Decision-Making, red. W. Milo, P. Wdowiński (FindEcon Monograph Series. Advances in Financial Market Analysis, nr 2), Łódź University Press, Łódź, s. 123–137.

Doman R. (2003), *Forecasting the Polish Stock Market Volatility. A Comparison Between GARCH and SV Models Abilities*, [w:] *Macromodels'2002. Proceedings of the 29th International Conference Macromodels*, Łódź, s. 237–251.

Doman R. (2003a), *Prognozowanie zmienności zrealizowanej indeksu WIG20 za pomocą modeli GARCH*, „Przegląd Statystyczny", nr 50(4), s. 147–163.

Doman R. (2004), *Forecasting the Polish Stock Market Volatility with Hamilton's Markov Switching Models*, [w:] *Macromodels'2003. Proceedings of the 30th International Conference Macromodels*, Łódź, 103–121.

Doman R. (2004a), *Dynamika korelacji między rynkami kapitałowymi krajów Europy Środkowej*. [w:] *Rynek Kapitałowy. Skuteczne Inwestowanie*, cz. I, „Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego", z. 389, s. 351–361.

Doman R. (2005), *Forecasting the Polish Stock Market Volatility with Markov Switching GARCH*, [w:] *Forecasting Financial Markets. Theory and Applications*, red. W. Milo, P. Wdowiński, Łódź University Press, Łódź 2006.

Doman R. (2005a), *Modelowanie i prognozowanie zmienności kursów walutowych za pomocą modeli przełącznikowych typu Markowa*, „Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej w Poznaniu", z. 64, s. 70–87.

Doman R. (2007), *Modelowanie zależności warunkowych na polskim rynku walutowym*, „Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej w Poznaniu", z. 92, s. 58–77.

Doman M., Doman R. (2003), *Kursy walutowe w gospodarkach podlegających transformacji*, „Ekonomista", nr 1, s. 105–112.

Doman M., Doman R. (2004), *Ekonometryczne modelowanie dynamiki polskiego rynku finansowego*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań.

Doman M., Doman R. (2005), *Ocena przydatności modeli BL-GARCH w szacowaniu wartości zagrożonej indeksu WIG20*, „Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej w Poznaniu", z. 64, s. 50–69.

Doman M., Doman R. (2006), *Regime Switching in the Dynamics of Polish Short-Term Interest Rates*, [w:] *Money and Transition*, red. M. Ratajczak, J. Wallusch, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań.

Doman M., Doman R. (2007a), *Zmiany strukturalne w kursach wymiany złotego*, „Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej w Poznaniu", z. 92, s. 78–99.

Donkhan P., Oppenheim G., Taqqu M.S. (red.) (2003), *Theory and Applications of Long Rang Dependence*, Birkhäuser, Boston.

Doornik J.A. (2007), *An Object Oriented Matrix Programming Language* Ox™ 5, Timberlake Consultants, London.

Durbin J., Koopman S.J. (1997), *Monte Carlo Maximum Likelihood Estimation for Non-Gaussian State Space Models*, „Biometrica", nr 84, s. 669–684.

Durbin J., Koopman S.J. (2000), *Time Series Analysis of Non-Gaussian Observation Based on State Space Models from Both Classical and Bayesian Perspectives (with discussion)*, „Journal of the Royal Statistical Society", seria B, nr 62, s. 3–56.

Durbin J., Koopman S.J. (2001), *Time Series Analysis by State Space Methods*, Oxford University Press, Oxford.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Durbin J., Koopman S.J. (2002), *A Simple and Efficient Simulation Smoother for State Space Time Series Analysis*, „Biometrica", nr 89, s. 603–616.
Engle R. (1982), *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*, „Econometrica", nr 50, s. 987–1007.
Engle R.F. (2002), *Dynamic Conditional Correlation. A Simple Class of Multivariate GARCH Models*, „Journal of Business and Economic Statistics", nr 20(3), s. 339–350.
Engle R.F., Bollerslev T. (1986), *Modeling the Persistence of Conditional Variances*, „Econometric Reviews", nr 5, s. 1–50.
Engle R.F., Kroner K.F. (1995), *Multivariate Simultaneous Generalized ARCH*, „Econometric Theory", nr 11, s. 122–150.
Engle R.F., Lilien D.M., Robins R.P. (1987), *Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure. The ARCH-M Model*, „Econometrica", nr 55, s. 525–542.
Engle R.F., Manganelli S. (1999), *CAViaR. Conditional Autoregressive Value at Risk by Regression Quantiles*, [w:] *Econometric Society World Congress 2000*, Contributed Papers 0841, Econometric Society.
Engle R.F., Manganelli S. (2004), *CAViaR. Conditional Autoregressive Value at Risk by Regression Quantiles*, „Journal of Bussines and Economic Statistics", nr 22, s. 367–381.
Engle R.F., Ng V.K. (1993), *Measuring and Testing the Impact of News on Volatility*, „Journal of Finance", nr 48, s. 1749–1778.
Engle R.F., Patton A.J. (2001), *What Good Is a Volatility Model?*, „Qualitative Finance", vol. 1, s. 237–245.
Engle R.F., Sheppard K. (2001), *Theoretical and Empirical Properties of Dynamic Conditional Correlation Multivariate GARCH*, NBER working paper 8554.
Fang K.T., Kotz, S., Ng K.W. (1990), *Symmetric Multivariate and Related Distributions*, Chapman and Hall, London.
Feller W. (1997), *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
Fernández C., Osiewalski J., Steel M.F.J. (1995), *Modelling and Inference with v-Spherical Distributions*, „Journal of the American Statistical Association", nr 90, s. 1331–1340.
Fernández C., Steel M.F.J. (1998), *On Bayesian Modelling of Fat Tails and Skewness*, „Journal of the American Statistical Association", nr 93, s. 359–371.
Figlewski S. (1997), *Forecasting Volatility*, „Financial Markets, Institutions and Instruments (New York University Salomon Center)" vol. 6, nr 1, s. 1–88.
Fiszeder P., Romański J. (2001), *Modelling Polish Stock Returns with GARCH Models*, [w:] *Macromodels 2000. Proceedings of the 27th International Conference Macromodels*, Łódź, s. 115–127
Fiszeder P. (2004), *Dynamic Hedging Portfolios – Application of Bivariate GARCH Models*, [w:] *Dynamic Econometric Models*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń.
Fiszeder P. (2005), *Modelowanie procesów finansowych z długą pamięcią w średniej i wariancji*, [w:] *Dynamiczne Modele Ekonometryczne, Materiały na IX Ogólnopolskie Seminarium Naukowe*, UMK, Toruń, s. 233–240.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Fiszeder P. (2005a), *Estymacja współczynników beta na podstawie wielorównaniowego modelu GARCH*, „Acta Universitatis Nicolai Copernici. Ekonomia", vol. XXXVI.
Fiszeder P. (2007), *Konstrukcja portfeli efektywnych z zastosowaniem wielorównaniowych modeli GARCH*, „Folia Oeconomica Cracoviensia", vol. 48.
Fiszeder P., Kwiatkowski J. (2005), *Model GARCH-M ze zmiennym parametrem – analiza wybranych spółek i indeksów notowanych na GPW w Warszawie*, „Przegląd Statystyczny", nr 52, s. 73–88.
Fletcher R. (1987), *Practical Methods of Optimization*, John Wiley, New York.
Franses P.H., van Dijk D. (2000), *Non-linear Time Series Models in Empirical Finance*, Cambridge University Press, Cambridge.
Fridman M., Harris L. (1998), *A Maximum Likelihood Approach for Non-Gaussian Stochastic Volatility Models*, „Journal of Bussiness and Economic Statistics", nr 16, s. 284–291.
Fuller W.A. (1976), *Introduction to Statistical Time Series*, John Wiley, New York.
Geweke J. (1986), *Modeling the Persistence of Conditional Variances. A Comment*, „Econometric Review", nr 5, s. 57–61.
Geweke J. (1989), *Bayesian Inference in Econometric Models Using Monte Carlo Integration*, „Econometrica", nr 57, s. 1317–1339.
Geweke J., Porter-Hudak S. (1983), *The Estimation and Application of Long Memory Time Series Models*, „Journal of Time Series Analysis", nr 4, s. 221–237.
Ghysels E., Harvey A.C., Renault E. (1996), *Stochastic Volatility*, [w:] *Handbook of Statistics*, red. G.S. Maddala, C.R. Rao, vol. 14, *Statistical Methods in Finance*, Amsterdam.
Glosten L.R., Jagannathan R., Runkle D.E. (1993), *On the Relation Between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks*, „Journal of Finance", nr 48, s. 1779–1801.
Goldberg D.E. (1989), *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning,* Addison-Wesley Publishing Company, Reading.
Gourieroux C. (1997), *ARCH Models and Financial Applications*, Springer, Berlin.
Gourieroux C., Jasiak J. (2001), *Financial Econometrics*, Princeton University Press, Princeton.
Granger C., Andersen A. (1978), *An Introduction to Bilinear Time Series Models*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen.
Granger C.W.J., Joyeux R. (1980), *An Introduction to Long-Memory Time Series and Fractional Differencing*, „Journal of Time Series Analysis", nr 1, s. 15–30.
Greene W. (2000), *Econometric Analysis*, Macmillan, New York.
Hamilton J.D. (1989), *A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle*, „Econometrica", nr 57, s. 357–384.
Hamilton J.D. (1994), *Time Series Analysis*, Princeton University Press, Princeton.
Hamilton J.D., Susmel R. (1994), *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity and Changes in Regime*, „Journal of Econometrics", nr 64, s. 307–333.
Hansen B.E. (1992), *Testing for Parameter Instability in Linear Models*, „Journal of Policy Modeling", nr 14, s. 517–533.
Hansen B.E. (1994), *Autoregressive Conditional Density Estimation*, „International Economic Review", nr 35, s. 705–730.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Harvey A.C., Ruiz E., Shephard N. (1994), *Multivariate Stochastic Variance Models*, „Review of Economic Studies", nr 61, s. 247–264.
Higgins M., Bera A. (1992), *A Class of Nonlinear ARCH Models*, „International Economic Review", nr 33, s. 137–158.
Hol E. (2003), *Empirical Studies on Volatility in International Stock Market*, Kluwer, Dordrecht.
Hol E., Koopman S.J. (2002), *Stock Index Volatility Forecasting With High Frequency Data*, Tinbergen Institute Discussion Paper 068/4.
Hosking J.R.M. (1980), *The Multivariate Portmateau Statistic*, „Journal of American Statistical Association", nr 75, s. 602–608.
Hull J., White A. (1987), *The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities*, „Journal of Finance", nr 42, s. 281–300.
Humeńczuk P. (2005), *Minimalizacja ryzyka rynkowego przykładowej akcji przy uwzględnieniu warunkowej wariancji i kowariancji procesów*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, Wrocław.
Hunt P.J., Kennedy J.E. (2000), *Financial Derivatives in Theory and Practice*, John Wiley, Chichester.
Jacquier E., Polson N.G., Rossi P.E. (1994), *Bayesian Analysis of Stochastic Volatility Models (with discussion)*, „Journal of Bussiness and Economic Statistics", nr 12, s. 371–417.
Jajuga K. (2001), *Ogólny model dynamiki cen finansowych*, [w:] *Dynamiczne modele ekonometryczne. VII Ogólnopolskie Seminarium Naukowe*, 4–6 września 2001, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń, s. 7–14.
Jajuga K., Kuziak K., Papla D., Rokita P. (2001), *Ryzyko wybranych instrumentów polskiego rynku finansowego*, „Rynek Terminowy", nr 11, s. 133–140.
Jajuga K. (red.) (2008), *Zarządzanie ryzykiem*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
Jajuga K., Jajuga T. (2004), *Inwestycje*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
Jajuga K., Kuziak K., Papla D., Rokita P. (2001), *Ryzyko wybranych instrumentów polskiego rynku finansowego*, „Rynek Terminowy", nr 11, s. 133–140.
Jakubowski J., Sztencel R. (2001), *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, Script, Warszawa.
Jarque C.M., Bera A.K. (1980), *Efficient Tests for Normality, Homoscedasticity and Serial Independence of Regression Residuals*, „Economics Letters", nr 6, 255–259.
Johnson R.A., Wichern D.W. (1992), *Applied Multivariate Statistical Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
Jorion P. (2000), *Value at Risk – The New Benchmark for Managing Financial Risk*, Mc Graw-Hill, New York.
Karatzas I., Shreve S.E. (2000), *Brownian Motion and StochasticCalculus*, Springer, New York.
Kariya T. (1988), *MTV Model and its Application to the Prediction of Stock Prices*, [w:] Proceedings of the Second International Tampere Conference in Statistics, red. T. Pullila, S. Puntanen, University of Tampere, Tampere.
Kim C.J., Nelson C.R. (1999), *State Space Models with Regime Switching*, MIT Press, Cambridge.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Kim S., Shephard N., Chib S. (1998), *Stochastic Volatility. Likelihood Inference and Comparison with ARCH Models*, „Review of Economic Studies", nr 65, s. 361–393.
Kirman A., Teyssiere G. (red.) (2005), *Long Memory in Economics*, Springer, Berlin.
Koenker R., Basset G. (1978), *Regression Quantiles*, „Econometrica", nr 46, s. 33–50.
Koenker R. (2005), *Quantile Regression*, Cambridge University Press, New York.
Koopman S.J., Shephard N., Doornik J.A. (1999), *Statistical Algorithms for Models in State Space Using SsfPack 2.2*, „Econometrics Journal", nr 2, s. 107–160.
Kośko M. (2005), *Zastosowanie przełącznikowych modeli Markowa w analizie stóp zwrotu akcji*, [w:] *Dynamiczne Modele Ekonometryczne. IX Ogólnopolskie Seminarium Naukowe*, 6–8 września 2005, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń, s. 241–248.
Kupiec P. (1995), *Techniques for Veryfying the Accuracy of Risk Management Models*, „Journal of Derivatives", nr 2, s. 173–184.
Kwiatkowski D., Phillips P.C.B., Schmidt P., Shin Y. (1992), *Testing the Null Hypothesis of Stationarity Against the Alternative of a Unit Root. How Sure Are We That Economic Time Series Have a Unit Root?*, „Journal of Econometrics", nr 54, s. 159–178.
Kwiatkowski J. (1999), *Bayesowska analiza modeli ARFIMA i persystencji na przykładzie kursu jednostek uczestnictwa funduszu Pioneer*, [w:] *Dynamiczne Modele Ekonometryczne. VI Ogólnopolskie Seminarium Naukowe*, 7–9 września 1999, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń, s. 261–276.
Kwiatkowski J. (2000), *Bayesian Analysis of Long Memory and Persistence Using ARFIMA Models with Application to Polish Stock Market*, [w:] „Dynamic Econometric Models", vol. 4, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń, s. 199–210.
Lambert P., Laurent S. (2001), *Modelling Financial Time Series Using GARCH-Type Models with a Skewed Student Distribution for the Innovations* [Discussion Paper 01–25], Institut de Statistique, Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve.
Lamoureux C.G., Lastrapes W.D. (1990), *Persistence in Variance, Structural Change and the GARCH Model*, „Journal of Business and Economic Statistics", nr 8, s. 225–234.
Lee S., Hansen B. (1994), *Asymptotic Properties of the Maximum Likelihood Estimator and Test for Stability of Parameters of GARCH and IGARCH Models,* „Econometric Theory", nr 10, s. 29–52.
Li W.K., McLeod A.I. (1981), *Distribution of the Residual Autocorrelations in Multivariate ARMA Time Series Models*, „Journal of the Royal Statistical Society", seria B, nr 43, s. 231–239.
Ling S., McAleer M. (2002), *Stationarity and the Existence of Moments of a Family of GARCH Processes*, „Journal of Econometrics", nr 106, s. 109–117.
Lipcer R.Sz., Sziriajew A.N., *Statystyka procesów stochastycznych*, PWN, Warszawa 1981.
Lo A.W. (1991), *Long-Term Memory in Stock Market Prices*, „Econometrica", nr 59, s. 1279–1313.
Lumsdaine R.L. (1996), *Consistency and Asymptotic Normality of the Quasi Maximum Likelihood Estimator in IGARCH(1,1) and Covariance Stationary GARCH(1,1) Models*, „Econometrica", nr 64, s. 575–596.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Lundbergh S., Teräsvirta T. (2000), *Modelling Economic High Frequency Time Series with STAR-STGARCH Models*, Stockholm School of Economics, Stockholm (SSE/EFI Working Paper Series in Economics and Finance, nr 291).

Lütkepohl H. (2005), *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*, Springer, Berlin.

Mandelbrot B. (1963), *New Methods in Statistical Economics*, „Journal of Political Economy", nr 71, s. 421–440.

Manganelli S., Engle R.F. (2001), *Value at Risk Models in Finance*, ECB Working Paper No. 75.

Martens M. (2002), *Measuring and Forecasting S&P 500 Index-Futures Volatility Using High-Frequency Data*, „Journal of Futures Markets", nr 22, s. 497–518.

McLeod A.I., Li W.K. (1983), *Diagnostic Checking ARMA Time Series Model Using Squared Residual Autocorrelations*, „Journal of Time Series Analysis", nr 4, s. 269–273.

McNeil A.J., Frey R., Embrecht P. (2005), *Quantitative Risk Mangement*, Princeton Univeristy Press, Princeton.

Melino A., Turnbull S. (1990), *Pricing Foreign Currency Options with Stochastic Volatility*, „Journal of Econometrics", nr 45, s. 7–39.

Mikosch T., Starica C. (1999), *Change of Structure in Financial Data, Long Range Dependence and GARCH*, University of Groningen, Groningen.

Mincer J., Zarnowitz V. (1969), *The Evaluation of Economic Forecasts*, [w:] *Economic Forecasts and Expectations*, red. J. Mincer, National Bureau of Economic Research, New York.

Nelson D.B. (1990), *Stationarity and Persistence in the GARCH(1,1) Model*, „Econometric Theory", nr 6, s. 318–334.

Nelson D.B. (1991), *Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns. A New Approach*, „Econometrica", nr 59, s. 347–370.

Newey W., Steigerwald D. (1997), *Asymptotic Bias for Quasi Maximum Likelihood Estimators in Conditional Heteroskedasticity Models*, „Econometrica", nr 65, s. 587–599.

Newey W.K., West K.D. (1987), *A Simple, Positive Semidefinite, Heteroskedasticity and Autocorelation Consistent Covariance Matrix*, „Econometrica", nr 59, s. 347–370.

Nyblom J. (1989), *Testing for the Constancy of Parameters over Time*, „Journal of the American Statistical Association", nr 84, s. 213–230.

Osiewalski J. (2001), *Ekonometria bayesowska w zastosowaniach*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Krakowie, Kraków.

Osiewalski J., Pajor A. (2007), *Flexibility and Parsimony in Multivariate Financial Modelling. A Hybrid Bivariate DCC-SV Model*, [w:] *Financial Markets. Principles of Modelling, Forecasting, and Decision-Making*, red. W. Milo, P. Wdowiński, Łódź University Press, Łódź, s. 11–26 (FindEcon Monograph Series. Advances in Financial Market Analysis, nr 3).

Osiewalski J., Pajor A., Pipień M. (2004), *Bayesowskie modelowanie i prognozowanie indeksu WIG z wykorzystaniem procesów GARCH i SV*, [w:] *XX Seminarium Ekonometryczne im. Profesora Zbigniewa Pawłowskiego*, red. Aleksander Zeliaś, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Krakowie, Kraków, s. 17–39.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Osiewalski J., Pajor A., Pipień M. (2006), *Bayes Factors for Multivariate GARCH and SV Models*, [w:] *Financial Markets. Principles of Modeling Forecasting and Decision Making*, red. W. Milo, P. Wdowiński, Łódź University Press, Łódź, s. 13–35 (FindEcon Monograph Series. Advances in Financial Market Analysis, nr 2).

Osiewalski J., Pipień M. (1999), *Bayesowskie testowanie modeli GARCH i IGARCH*, „Przegląd Statystyczny", z. 1, s. 5–23.

Osiewalski J., Pipień M. (1999a), *Bayesian Forecasting of Foreign Exchange Rates Using GARCH Models with Skewed-t Conditional Distributions*, [w:] *Macromodels'1998. Proceedings of the 25th International Conference Macromodels*, Łódź, s. 195–218.

Osiewalski J., Pipień M. (2000), *GARCH-in-Mean through Skewed t Conditional Distributions: Bayesian Inference for Exchange Rates*, [w:] *Macromodels'1999. Proceedings of the 26th International Conference Macromodels*, Łódź, s. 354–369.

Osiewalski J., Pipień M. (2004), *Bayesian Comparison of Bivariate ARCH-Type Models for the Main Exchange Rates in Poland*, „Journal of Econometrics", nr 123(2), s. 371–391.

Osiewalski J., Pipień M. (2004a), *Bayesian Comparison of Bivariate GARCH Processes. The Role of the Conditional Mean Specification*, [w:] *Contributions to Economic Analysis*, vol. 269, *New Directions in Macromodelling*, red. A. Welfe, Elsevier, Amsterdam, s. 173–196.

Osiewalski J., Pipień M. (2005), *Bayesian Analysis of Dynamic Conditional Correlation Using Bivariate GARCH Models*, „Acta Universitatis Lodziensis. Folia Oeconomica", nr 192, Łódź, s. 213–227.

Osińska M. (2006), *Ekonometria finansowa*, Wydawnictwo PTE, Warszawa.

Osińska M. (red.) (2007), *Ekonometria współczesna*, Wydawnictwo „Dom Organizatora", Toruń.

Pajor A. (2001), *Modele stochastycznej zmienności. estymacja metodą quasi-największej wiarygodności*, „Przegląd Statystyczny", z. 3–4, s. 323–344.

Pajor A. (2003), *Procesy zmienności stochastycznej w bayesowskiej analizie finansowych szeregów czasowych*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Krakowie, Kraków (Prace Doktorskie. Monografie, nr 2).

Pajor A. (2006), *VECM-TSV Models for Two Polish Official Exchange Rates,* [w:] *Financial Markets: Principles of Modelling, Forecasting, and Decision-Making*, red. W. Milo, P. Wdowiński, Łódź University Press, Łódź, s. 49–66 (FindEcon Monograph Series. Advances in Financial Market Analysis, nr 2).

Pajor A. (2007), *Bayesian Analysis and Forecasting of the Conditional Correlations Between Stock Index Returns with Multivariate SV Models,* [w:] *Financial Markets: Principles of Modelling, Forecasting, and Decision-Making*, red. W. Milo, P. Wdowiński, Łódź University Press, Łódź, s. 101–121 (FindEcon Monograph Series. Advances in Financial Market Analysis, nr 3).

Papla D. (2007), *Wykorzystanie modelu DCC-MGARCH w analizie zmian zależności wybranych akcji GPW w Warszawie*, [w:] *Dynamiczne Modele Ekonometryczne. X Ogólnopolskie Seminarium Naukowe*, 4–6 września 2007, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń, s. 267–274.

Piontek K., Papla D. (2005), *Wykorzystanie wielorównaniowych modeli AR-GARCH*

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

w pomiarze ryzyka metodą VaR, AE we Wrocławiu, Wrocław, s. 126–138 (Prace Naukowe, nr 1088).
Pelagatti M.M., Rondena S. (2004), *Conditional Correlation with Elliptical Distributions*, Universita degli Studi di Milano-Bicocca, Dipartimento di Statistica, Working Paper.
Pentula S. (1986), *Modeling the Persistence of Conditional Variances. A Comment*, „Econometric Review", nr 5, s. 71–74.
Perron P. (1988), *Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series*, „Journal of Economic dynamics in control", nr 12, s. 297–332.
Pflug G. (2000), *Some Remarks on the Value-at-Risk and the Conditional Value-at-Risk*, [w:] *Probabilistic Constrained Optimization. Methodology and Applications*, red. S. Uryasev, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, s. 272–281.
Phillips P.C.B. (1987), *Time Series Regression with a Unity Root*, „Econometrica", nr 55, s. 277–301.
Phillips P.C.B., Perron P. (1988), *Testing for a Unit Root in Time Series Regression*, „Biometrika", nr 75, s. 335–346.
Piontek K. (2000), *Modelowanie finansowych szeregów czasowych z warunkową wariancją*, [w:] *Materiały konferencji „Inwestycje finansowe i ubezpieczenia – tendencje światowe a rynek polski"*, Szklarska Poręba, październik 2000, Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu, Wrocław, s. 218–226 (Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, nr 890).
Piontek K. (2003), *Modelowanie „długotrwałej pamięci" szeregów zmienności*, [w:] *Modelowanie preferencji a ryzyko '03*, red. T. Trzaskalik, Akademia Ekonomiczna w Katowicach, Katowice, s. 491–504.
Piontek K. (2006), *Niektóre praktyczne wyzwania w modelowaniu wielowymiarowych procesów GARCH*, Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu, Wrocław, s. 194–205 (Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, nr 1126, Taksonomia, nr 13).
Piontek K. (2006a), *Prognozowanie macierzy kowariancji i korelacji finansowych szeregów czasowych*, [w:] *Modelowanie preferencji a ryzyko '05*, red. T. Trzaskalik, Akademia Ekonomiczna w Katowicach, Katowice, s. 143–160.
Pipień M. (2006), *Wnioskowanie bayesowskie w ekonometrii finansowej*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Krakowie, Kraków.
Poon S.H. (2005), *A Practical Guide to Forecasting Financial Market Volatility*, John Wiley, Chichester.
Price K., Storn R. (1997), *Differential Evolution*, „Dr. Dobb's Journal", kwiecień, s. 18–24.
Protter E.P. (2005), *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer, Berlin.
Ripley B.D. (1987), *Stochastic Simulation*, John Wiley, New York.
Riskmetrics (1996), *Technical Document*, J.P. Morgan, New York.
Robinson P.M. (1994), *Semiparametric Analysis of Long-Memory time series*, „Annals of Statistics", nr 22, s. 515–539.
Sandmann G., Koopman S.J. (1998), *Estimation of Stochastic Volatility Models via Monte Carlo Maximum Likelihood*, „Journal of Econometrics", nr 87, s. 271–301.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Scaillet O. (2004), *Nonparametric Estimation and Sensitivity Analysis of Expected Shortfall*, „Mathematical Finance", nr 14, s. 115–129.
Schwert G.W. (1989), *Why Does Stock Market Volatility Change over Time?*, „Journal of Finance", nr 44, s. 1115–1153.
Schwert W. (1990), *Stock Volatility and the Crash of '87*, „Review of Financial Studies", nr 3, s. 77–102.
Shephard N. (red.) (2005), *Stochastic Volatility. Selected readings*, Oxford University Press, New York.
Shephard N., Pitt M.K. (1997), *Likelihood Analysis of Non-Gaussian Measurement Time Series*, „Biometrika", nr 84, s. 653–667.
Shiryaev A.N. (1999), *Essentials of Stochastic Finance. Facts, Models, Theory*, World Scientific, Singapore.
Shumway R.H., Stoffer D. (2006), *Time Series Analysis and its Applications*, Springer, New York.
Sobczyk K. (1996), *Stochastyczne równania różniczkowe*, WNT, Warszawa.
Subba Rao T. (1981), *On the Theory of Bilinear Models*, „Journal of the Royal Statistical Society", seria B, nr 43, s. 244–255.
Syczewska E.M. (1999), *Analiza relacji długookresowych. Estymacja i weryfikacja*, Oficyna Wydawnicza Szkoły Głównej Handlowej, Warszawa.
Tarczyński W., Mojsiewicz M. (2001), *Zarządzanie ryzykiem*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
Taylor S. (1986), *Modelling Financial Time Series*, John Wiley, New York.
Taylor S. (1990), *Modelling Stochastic Volatility*, Discussion paper, University of Lancaster, Lancaster.
Taylor S. (1994), *Modeling Stochastic Volatiltiy. A Review and Comparative Study*, „Mathematical Finance", nr 4, s. 183–204.
Teräsvirta T. (1994), *Specification, Estimation and Evaluation of Smooth Transition Autoregressive Models*, „Journal of the American Statistical Association", nr 89, s. 208–218.
Tong H. (1990), *On a Treshold Model*, [w:] *Pattern Recognition and Signal Processing*, red. C.H. Chen, Sijthoff & Noordhoff, Amsterdam, s. 101–141.
Tong H., Lim K. (1980), *Threshold Autoregression, Limit Cycles, and Cyclical Data*, „Journal of the Royal Statistical Society", seria B, nr 42, s. 245–292.
Tsay R.S. (2005), *Analysis of Financial Time Series*, John Wiley, New York (Wiley Series in Probability and Statistics).
Tse Y., Tsui A. (2002), *A Multivariate GARCH Model with Time-Varying Correlations*, „Journal of Business and Economic Statistics", nr 20, s. 351–362.
Turner C.M., Startz R., Nelson C.R. (1989), *A Markov Model of Heteroscedasticity, Risk and Learning in Stock Market*, „Journal of Financial Economics", nr 25, s. 3–22.
Weide van der R. (2002), *GO-GARCH. A Multivariate Generalized Orthogonal GARCH Model*, „Journal of Applied Econometrics", nr 17, s. 549–564.
Weiss A.A. (1984), *ARMA Models with ARCH Errors*, „Journal of Time Series Analysis", nr 5, s. 129–143.
Weiss A.A. (1986), *ARCH and Bilinear Time Series Models. Comparison and Combination*, „Journal of Business and Economic Statistics", nr 4, s. 59–70.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Weiss A.A (1986a), *Asymptotic Theory for ARCH Models. Estimating and Testing*, „Econometric Theory", nr 2, s. 107–131.
Weiss A.A (1991), *Estimating Nonlinear Dynamic Models Using Least Absolute Error Estimation*, „Econometric Theory", nr 7, s. 46–68.
Welfe A. (2003), *Ekonometria*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
White H. (1992), *Nonparametric Estimation of Conditional Quantiles Using Neural Networks*, [w:] *Artificial Neural Networks. Approximation and Learning Theory*, red. H. White, Blackwell, Oxford, s. 191–205.
White H. (1994), *Estimation, Inference and Specification Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge.
Zakoian J.M. (1994), *Threshold Heteroskedasticity Models*, „Journal of Economic Dynamics and Control", nr 15, s. 931–955.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Indeks

A

algorytm genetyczny 224
  algorytm DE 225
aproksymacyjny liniowy model gaussowski 181-183

B

biały szum 18
błądzenie losowe 121

C

charakter szeregów zwrotów finansowych w zależności od segmentu rynku 22
ciąg różnic martyngałowych 82
czas powrotu procesu do reżimu 243

D

długa pamięć w finansowych szeregach czasowych 119-138
długa pamięć w szeregach zmienności 125-127
dynamika zależności warunkowych 265-285
dzienna zmienność zrealizowana (wariancja zrealizowana) 143

E

efekt ARCH 76
efekt dźwigni 106
efekty mikrostruktury rynku 151
  a zmienność zrealizowana 150
empiryczny wskaźnik skośności 19
estymacja modeli AR-GARCH 110-111
estymator Robinsona parametru długiej pamięci 133

F

funkcja autokorelacji ACF 18
funkcja autokorelacji cząstkowej PACF 55
funkcja gęstości spektralnej 119
funkcja wiarygodności 56
funkcje odpowiedzi na impuls 70

H

heteroskedastyczność warunkowa 75

I

iloczyn Kroneckera 267

K

koherentne miary ryzyka 289

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

oczekiwany niedobór jako przykład koherentnej miary ryzyka 289
kowariancyjnie stacjonarny szereg
jednowymiarowy 17
wielowymiarowy 267
kurtoza empiryczna 20
kryteria informacyjne 57
Akaike 57
Hannana-Quinna 57
Schwarza 57
Shibaty 57
skorygowane kryterium Akaike 57
kwantyle regresyjne 219-220
kwantyle warunkowe 220

L

liniowe szeregi czasowe 46

Ł

łańcuch Markowa 241

M

macierz korelacji krzyżowych z próby 268
macierz kowariancji warunkowych 266
metoda symulacji historycznej 198-200, 286-288
miary jakości prognoz 94
mikrostruktura rynku 151
model AD (adaptacyjny) 221
model ARMA-GARCH 96
model AR(p) 47-60
własności 48-53
identyfikowanie 55-57
estymacja parametrów 58
prognozowanie
model APARCH 107-108
model ARCH 75, 79-80
własności modelu ARCH (1) 80
ograniczenia i słabości 81
model ARFIMA 123-124
model ARIMA 120-122
model ARMA(p,q)
ogólna postać 67
estymacja parametrów 68
prognozowanie 68
model ASM (asymetryczny z wartością bezwzględną) 222
model BEKK 270
model Blacka–Scholesa 178-179
model CCC 271
model DCC 272
model Diag-BEKK 271
model EGARCH 109
model FIGARCH 127
FIGARCH (BBM) 127
FIGARCH (Chung) 127
model GARCH 81-104
rozszerzenia 105-110
zalety 82
specyfikacja 82
interpretacja parametrów 82
kowariancyjna stacjonarność 83
prognozy zmienności 83
model GARCH-M 110
model GJR-GARCH 105-107
model Hamiltona 241-245
zastosowanie 249
model Hulla–White'a 178
model HYGARCH 128
model IGARCH 126
model INDIRECT GARCH 223
model Log-ARCH 108
model M-GARCH 265
szacowanie wartości zagrożonej portfela 288
model MA(q) 62
estymacja 64
model NARCH 108
model O-GARCH 275
model GO-GARCH 275
model progowy TAR 240
model SAV (symetryczny z wartością bezwzględną) 222
model Scalar-BEKK 271

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

model stałych korelacji warunkowych 271
model STAR 240
model ST-GARCH 241
model SV 176-179, 183-195
  specyfikacja 177
  prognozowanie zmienności 183
  porównanie z modelem GARCH 184-187
model SVX 179-183
model TARCH 107
model TS-GARCH 107
model VEC 270
model wektorowej autoregresji VAR 269
model zmienności stochastycznej z czasem ciągłym 178
modele ARMA 66-70
  odwracalne 70
modele ARMA-GARCH 96
modele autoregresji 47-60
modele BL-GARCH 168, 170
modele CAViaR 221-238
  estymacja 223-224
modele dwuliniowe 167-175
  a zgrupowania zmienności 168-169
modele dynamicznych korelacji warunkowych 272
modele MS-AR-GARCH 246-248
  estymacja 247
  prognozowanie 248
  porównanie z modelami ST--GARCH 256-261
modele przełącznikowe 239-249
  modele przełącznikowe typu Markowa 264
modele średniej ruchomej 61
modele wygładzonego przejścia 240-241
modele zmienności stochastycznej 176--195
modelowanie heteroskedastyczności warunkowej 75-104
most Browna 131, 132

O

oczekiwany dalszy czas trwania w reżimie 243
oczekiwany niedobór 205
odwracalny model ARMA 70
operator opóźnienia 52
operator vec 267
operator vech 267

P

pamięć długa 120
pamięć krótka 119
parametr asymetrii AS 98
parametr stopni swobody DF 98
periodogram 133
persystencja w finansowych szeregach czasowych 119-138
persystencja w szeregach zmienności 125-127
postać macierzowa wzoru na wariancję portfela 287
pośredni model GARCH 223
powracanie do średniej 70
prawdopodobieństwa przejścia 242
prawdopodobieństwo znajdowania się procesu w danym reżimie 243
procentowe logarytmiczne stopy zwrotu 20-21
  powody stosowania 22
proces ARFIMA 123
proces stochastyczny 17
proces VAR(1) 269
prognoza optymalna w sensie błędu średniokwadratowego 59
przestrzeń probabilistyczna 16

R

*Real*1 143
*Real*2 150
*Real*3 (modyfikacja Martensa) 150

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

redukcja wymiaru portfela 275
regresja kwantylowa 219
reszty standaryzowane 89
RiskMetrics 203
rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej 16
rozkład *t* Studenta 85
rozkłady stóp zwrotu
grube ogony 24, 30, 44
leptokurtoza 24
asymetria 27
normalność 27
wahliwość 29
zgrupowania zmienności 29, 44
autokorelacja 23, 29, 30
efekt dźwigni 31
zmiany strukturalne 33
zróżnicowanie zachowania 37
rozkłady błędu stosowane w modelach GARCH 85-89
rozkłady eliptyczne 273
równanie momentów 52

S

semimartyngał specjalny 154
skośny rozkład *t* Studenta 86-89
stacjonarność szeregu czasowego 17
ścisła 17
kowariancyjna 17, 267
szeregi stóp zwrotu cen instrumentów finansowych 15-44
stylized facts 23
szeregi czasowe 17
zależności liniowe 45-74
zależności nieliniowe 45

Ś

ścisły biały szum 18

T

teoria zmienności zrealizowanej 153-156
test ARCH *zob.* test Engle'a
test Boxa–Pierce'a 45, 68, 89
test Chowa 92
test DQT Engle'a i Manganellego 205
test Engle'a 78, 89
test GPH 133
test Hoskinga 268
test Jarque'a–Bery 19
test KPSS 130-131, 297, 298
test Kupca 203-204
test kwantyli dynamicznych *zob.* test DQT
test Ljunga–Boxa 46, 68
uogólnienia na przypadek wielowymiarowy 268
test Lo 132, 297
test McLeoda–Li 78, 268
test Nybloma 92, 298
test obciążenia wielkości dodatnich PSB 91
test obciążenia wielkości ujemnych (NSB) 90, 91
test Pearsona 93
test Phillipsa-Perrona 128-131, 297
test stałości korelacji 276
testowanie normalności rozkładu 19
testowanie wsteczne VaR 203
testy obciążenia znaków (SB) 90, 91

U

uogólniony rozkład błędu GED 86

V

VaR *zob.* wartość zagrożona (VaR)

W

wariacja kwadratowa 155
wariancja długookresowa procesu 129
wartość zagrożona (VaR) 196-218
szacowanie 198-205
metody nieparametryczne 198
VaR jako kwantyl rozkładu stóp zwrotu 198

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

symulacja historyczna 198-200
VaR jako kwantyl warunkowego rozkładu stóp zwrotu 201
modele parametryczne 202
VaR a prognozy zmienności 202
wartość zagrożona portfela 286-293
wielowymiarowy model zmienności 266
współczynnik asymetrii w skośnym rozkładzie *t* Studenta 89
współczynnik determinacji regresji Mincera-Zarnowitza 94
wykres kwantyl-kwantyl 20

Z

zależności liniowe w szeregach stóp zwrotu instrumentów finansowych 45-74
zależności liniowe w szeregach wielowymiarowych 267-269
zmienna losowa 16
zmienność aktualna 156
zmienność instrumentu finansowego 75
zmienność cen instrumentów finansowych 139-166
ewolucja 139
nieobserwowalność 139
jako wariancja z próby 140
jako wariancja warunkowa 141
jakość prognoz 142
zmienność zrealizowana 142, 143
jako zmienna objaśniająca 159
a zmienność z modelu SV 188

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626

Ekonometria finansowa, włączana zarówno do finansów, jak i ekonometrii, zajmuje się głównie modelowaniem rynków finansowych. Jej gwałtowny rozwój związany jest z rosnącym zapotrzebowaniem na nowe metody prognozowania zmienności cen instrumentów finansowych i zależności warunkowych pomiędzy ich stopami zwrotu. Metody te są niezbędne dla praktyków wyceniających instrumenty pochodne i szacujących ryzyko inwestycji finansowych.

Książka jest przewodnikiem po problemach i metodach ekonometrii finansowej dla studentów studiów dowolnego stopnia na kierunkach ekonomicznych i matematycznych. Jest także cenną pozycją dla praktyków w instytucjach finansowych i dla osób zainteresowanych modelowaniem i prognozowaniem finansowych szeregów czasowych. Przystępna forma wykładu wsparta dużą liczbą przykładów modelowania rzeczywistych szeregów z polskiego rynku finansowego umożliwi czytelnikowi zdobycie i utrwalenie konkretnych praktycznych umiejętności m.in. w następujących obszarach tematycznych:

- Analiza zależności liniowych w finansowych szeregach czasowych
- Modele zmienności cen instrumentów finansowych (GARCH, SV, przełącznikowe)
- Szacowanie wartości zagrożonej (VaR)
- Regresja kwantylowa (modele CAViaR)
- Modele dynamiki zależności warunkowych (BEKK, DCC, O-GARCH)

Autorzy książki są specjalistami z zakresu ekonometrii finansowej. Dr hab. Małgorzata Doman pracuje na stanowisku profesora nadzwyczajnego w Katedrze Matematyki Stosowanej na Wydziale Informatyki i Gospodarki Elektronicznej Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu. Dr hab. Ryszard Doman jest profesorem nadzwyczajnym Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, gdzie pełni funkcję kierownika Pracowni Ekonometrii Finansowej na Wydziale Matematyki i Informatyki.

Księgarnia internetowa: www.profinfo.pl

Zamówienia przyjmujemy:
tel. +48 22 535 81 22
fax +48 22 535 81 39
zamowienia.ksiazki@wolterskluwer.pl

ISBN 978-83-7526-677-1

cena 49 zł

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 19413363A3664626